# アウトライン

I. はじめに

II. 光と物質の相互作用
- 物質の中の光
  1. 波動方程式，複素屈折率と減衰率
  2. 因果律とクラマース･クローニッヒの関係式
- 光に対する物質の応答
  3. 金属の光学応答:ドルーデモデル
  4. 金属以外の光学応答:ローレンツモデル
  5. 半古典的モデルによる物質の光学応答
  6. 半導体の光学応答

III. 光の量子論の基礎
  7. 粒子性と波動性
  8. 電磁界の量子化，光子数状態，コヒーレント状態
  9. **昇降演算子**
  10. 自然放出

# 複素電界を表す演算子（昇降演算子）

#142(10)で定義した複素電界 $a$ を量子化表現する。

すなわち、#145(13)を用いて$p$を量子化し、

$$\hat{a} \equiv \frac{1}{\sqrt{2\hbar}}(\hat{q} + i\hat{p}) = \frac{1}{\sqrt{2\hbar}}\left(q + \hbar\frac{\partial}{\partial q}\right) \quad (23)$$

$$\hat{a}^{\dagger} \equiv \frac{1}{\sqrt{2\hbar}}(\hat{q} - i\hat{p}) = \frac{1}{\sqrt{2\hbar}}\left(q - \hbar\frac{\partial}{\partial q}\right) \quad (24)$$

と定義する。※ 後から明らかになる理由により、$\hat{a}$ と $\hat{a}^{\dagger}$ を昇降演算子と呼ぶ。

$\hat{q}$ と $\hat{p}$は、#138(1),(2)より、それぞれ電界と磁界の振幅を表す演算子であるが、$\hat{a}$ と $\hat{a}^{\dagger}$を用いて、

$$\hat{q} = \sqrt{\frac{\hbar}{2}}\left(\hat{a} + \hat{a}^{\dagger}\right): \quad \text{規格化された電界振幅} \quad (25)$$

$$\hat{p} = -i\sqrt{\frac{\hbar}{2}}\left(\hat{a} - \hat{a}^{\dagger}\right): \quad \text{規格化された磁界振幅} \quad (26)$$

と書ける。

※ 定数$1/\sqrt{2\hbar}$ は、後の結果がきれいになるように便宜上導入した。$q$ の演算子 $\hat{q}$ は、$\hat{q} = q$ なので、「$\hat{}$（ハット）」は必要ないが、演算子 $\hat{p}$ と表記を合わせるため、ハットを付けた。

# 昇降演算子の交換関係

(23), (24)より、

$$\hat{a}^\dagger\hat{a} = \frac{1}{2\hbar}\left(q - \hbar\frac{\partial}{\partial q}\right)\left(q + \hbar\frac{\partial}{\partial q}\right) = \frac{1}{2\hbar}\left(-\hbar^2\frac{\partial^2}{\partial q^2} + q^2\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial q}q - q\frac{\partial}{\partial q}\right)$$

ここで、任意の$q$の関数 $f(q)$ に対して

$$\left(\frac{\partial}{\partial q}q - q\frac{\partial}{\partial q}\right)f(q) = \frac{\partial}{\partial q}\big(qf(q)\big) - qf'(q) = f(q) \qquad (27)$$

なので、$\frac{\partial}{\partial q}$ と $q$ の交換関係 $\left[\frac{\partial}{\partial q}, q\right] \equiv \left(\frac{\partial}{\partial q}q - q\frac{\partial}{\partial q}\right) = 1$

$$\therefore \quad \hat{a}^\dagger\hat{a} = \frac{1}{2\hbar}\left(-\hbar^2\frac{\partial^2}{\partial q^2} + q^2\right) - \frac{1}{2} \qquad (28)$$

同様に、

$$\hat{a}\hat{a}^\dagger = \frac{1}{2\hbar}\left(-\hbar^2\frac{\partial^2}{\partial q^2} + q^2\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial q}q - q\frac{\partial}{\partial q}\right) = \frac{1}{2\hbar}\left(-\hbar^2\frac{\partial^2}{\partial q^2} + q^2\right) + \frac{1}{2}$$

$$\therefore \quad \boxed{\left[\hat{a}, \hat{a}^\dagger\right] \equiv \hat{a}\hat{a}^\dagger - \hat{a}^\dagger\hat{a} = 1} \qquad (29)$$

※ (29) は、量子化（#145(13)）の帰結である。$p$ を単なる数として扱う古典的な定義のままであれば、(29)の右辺は零になることが容易に確認できる。後述するように、(29)が非零であることで、自然放出など、様々な量子力学的な現象が生じる。

# 光子数の演算子

#146(14)より、電磁界のハミルトニアン $\hat{H} = \frac{\omega}{2}\left(-\hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial q^2} + q^2\right)$ なので、(28)を用いて、

$$\boxed{\hat{H} = \hbar\omega\left(\hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{1}{2}\right)} \qquad (30)$$

と書ける。
便宜上、#146-148で導入した光子数状態$\phi_n$を$|n\rangle$と書くと、#146(16), #147(21)より、

$$\hat{H}|n\rangle = \hbar\omega\left(n + \frac{1}{2}\right)|n\rangle \qquad (31)$$

(30)と(31)を見比べると、

$$\boxed{\hat{a}^\dagger \hat{a}|n\rangle = n|n\rangle} \qquad (32)$$

つまり、$\hat{a}^\dagger \hat{a}$ $(\equiv \hat{n})$は、光子数を表す演算子であることが分かる

# 昇降演算子の性質

いま、(32)の両辺に左から$\hat{a}$を施すと、

$$\hat{a}\left(\hat{a}^{\dagger}\hat{a}\right)|n\rangle = n\hat{a}|n\rangle$$

左辺の括弧を入れ替え、(29)を用いると、

$$\left(\hat{a}\hat{a}^{\dagger}\right)\hat{a}|n\rangle = \left(1+\hat{a}^{\dagger}\hat{a}\right)\hat{a}|n\rangle = n\hat{a}|n\rangle$$

$$\therefore \quad \left(\hat{a}^{\dagger}\hat{a}\right)(\hat{a}|n\rangle) = (n-1)(\hat{a}|n\rangle)$$

(32)と見比べると、上式は、

$$\hat{a}|n\rangle = A_n|n-1\rangle \qquad (A_n\text{は定数}) \qquad (33)$$

を意味する。同様にして、

$$\hat{a}^{\dagger}|n\rangle = B_{n+1}|n+1\rangle \quad (B_{n+1}\text{は定数}) \qquad (34)$$

が得られる。

つまり、

- $\hat{a}$は、光子を一つ減らす作用 （消滅演算子とも言う）
- $\hat{a}^{\dagger}$は、光子を一つ増やす作用 （生成演算子とも言う）

を与える。

# 昇降演算子の性質

係数$A_n$と$B_n$を求める。

(33)の両辺に$\langle n-1|$ を施すと、※1

$$\langle n-1|\hat{a}|n\rangle = \langle n-1|A_n|n-1\rangle = A_n \qquad (35)$$

一方、

$$\langle n-1|\hat{a} = \left[\hat{a}^\dagger|n-1\rangle\right]^\dagger = [B_n|n\rangle]^\dagger = B_n^*\langle n|$$

なので、

$$\langle n-1|\hat{a}|n\rangle = B_n^* \qquad (36)$$

(35)と(36) を見比べて、$A_n = B_n^*$

この関係を用いると、(33), (34) より、

$$\hat{a}^\dagger\hat{a}\,|n\rangle = A_n\hat{a}^\dagger|n-1\rangle = A_nB_n^*|n\rangle = |A_n|^2|n\rangle$$

一方、(32)より、左辺$= n|n\rangle$　$\therefore A_n = \sqrt{n}$　※2

以上より、次式が得られる。

$$\hat{a}|n\rangle = \sqrt{n}\,|n-1\rangle \qquad (37)$$

$$\hat{a}^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle \qquad (38)$$

※1 ブラケットの定義（#96）を思い出せば、〈　〉で両側を閉じたときに初めて、$\int_{-\infty}^{\infty} dq$ の積分を行うという決まりである。
つまり「$\langle n-1|$ を施す」とは、「左から$\phi_n^*(q)$をかけて$\int_{-\infty}^{\infty} dq$ する」という意味になる。

※2 $A_n$は複素数でも良いので$A_n = \sqrt{n}e^{i\theta}$と表されるべきだが、$\theta$に物理的意味はないので$\theta = 0$としている。

# 昇降演算子による光子数状態の表現

#147-148の光子数状態$\phi_n(\equiv |n\rangle)$を、昇降演算子を用いて求めることもできる。

まず、$n=0$の状態$\phi_0$（真空場）は、(37)より

$$\hat{a}\phi_0 = 0$$

#156(23)を用いて微分方程式で表すと、

$$\frac{1}{\sqrt{2\hbar}}\left(q+\hbar\frac{\partial}{\partial q}\right)\phi_0 = 0 \rightarrow \frac{1}{\phi_0}\frac{\partial\phi_0}{\partial q} = -\frac{q}{\hbar}$$

両辺を$q$で積分（変数分離）して、

$$\int\frac{1}{\phi_0}d\phi_0 = -\frac{1}{\hbar}\int q dq \rightarrow \ln\phi_0 = -\frac{q^2}{2\hbar} + const.$$

$$\therefore \phi_0(q) \propto \exp\left(-\frac{q^2}{2\hbar}\right) \quad (\equiv |0\rangle) \qquad (39)$$

となり、#147(19)の$n=0$ の解と一致する。

$n=1,2,3,\ldots$ の状態については、(38)より $\left(\hat{a}^\dagger\right)^n|0\rangle = \sqrt{n!}\,|n\rangle$ なので、

$$\boxed{|n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}}\left(\hat{a}^\dagger\right)^n|0\rangle} \qquad (40)$$

と表される。(39)に#156(24)を施していけば、$n=1,2,3,\ldots$ の状態が順に求まり、#147(19)と一致する。（確かめてみよ。#147(19)の右辺は規格化されておらず、その比例係数は$n$によって異なることに注意すること。(39)と(40)により比例係数も正しく求まる。）

# アウトライン

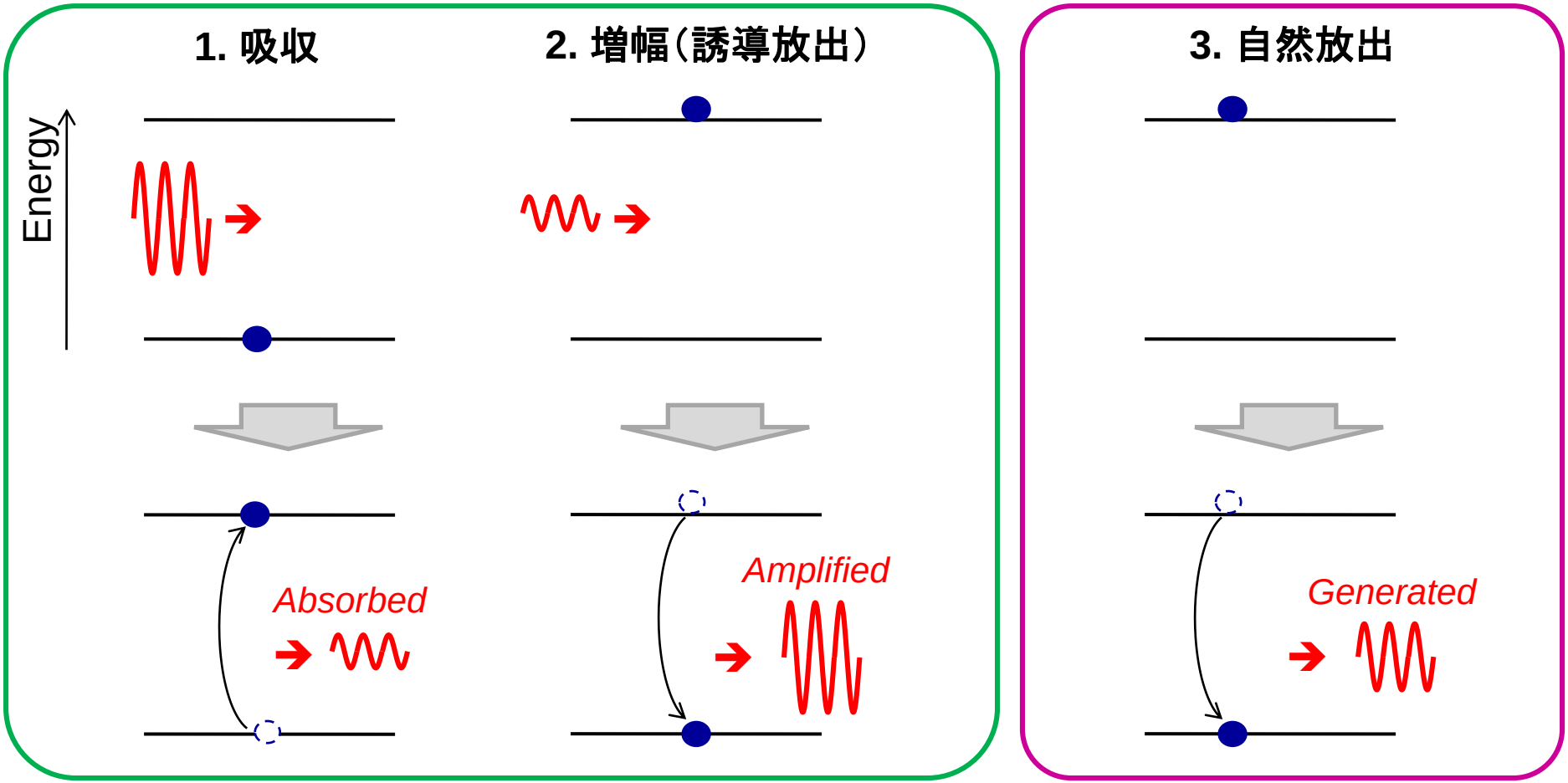
I. はじめに

II. 光と物質の相互作用
- 物質の中の光
  1. 波動方程式，複素屈折率と減衰率
  2. 因果律とクラマース･クローニッヒの関係式
- 光に対する物質の応答
  3. 金属の光学応答:ドルーデモデル
  4. 金属以外の光学応答:ローレンツモデル
  5. 半古典的モデルによる物質の光学応答
  6. 半導体の光学応答

III. 光の量子論の基礎
  7. 粒子性と波動性
  8. 電磁界の量子化，光子数状態，コヒーレント状態
  9. 昇降演算子
  10. **自然放出**

# 光と物質の相互作用

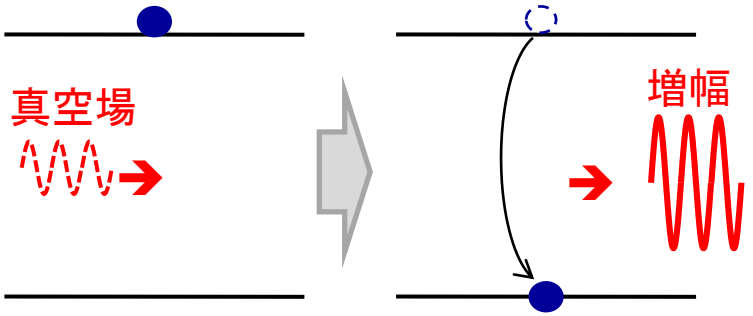
- 自然放出：入射光強度に依存せずに自発的に発生する発光
- 物質（電子）と光を両方とも量子化することで初めて説明される



# 自然放出の説明

## ①真空場揺らぎが誘導放出により増幅された結果として説明

- #150より、光子がない（$n = 0$）状態でも、エネルギー$\mathrm{E}_0 = \frac{1}{2}\hbar\omega$ の「真空場」が存在する。
- 半古典モデルにより導出した誘導放出により、この「真空場」も増幅される。




## ②電磁場を表す昇降消滅演算子の交換関係より導出

- 光吸収、誘導放出、自然放出を統一的に説明できる

本講義では、②による自然放出の導出過程を簡単に説明する。

※ より正確には、電子系を“数表示”で記述し、“第二量子化”を行うことで、電子（フェルミ粒子）と光子（ボーズ粒子）の相互作用が解析でき、その結果、「電子１個の遷移により光子１個が吸収／放出される」ことが導出できる（例えば、Miller, Quantum Mechanics for Scientists and Engineers, Ch. 17, 2008）。ここでは簡単のため、半古典モデルの結果に最低限の修正を加えることで、自然放出を導出する。

# 半古典モデルに修正を加える①

#96(8)より、始状態(|1⟩とする)から終状態(|2⟩とする)への遷移確率$|c_2|^2$は、$|c_1| \approx 1, |c_2| \approx 0$ と近似できる範囲で次式により求まる。

$$\frac{dc_2}{dt} = -\frac{i}{\hbar}\langle 2|\Delta V|1\rangle \qquad (41)$$

#96(8)(半古典モデル)では、電子系のみを量子化したので、電子のエネルギー固有状態$\varphi_j(x,t)\ (j = 1,2)$をそのまま$|j\rangle = \varphi_j(x,t) = \phi_j(x)\exp(-i\omega_j t)$と表しした。

しかし今回は、光も量子化しているので、光のエネルギー固有状態(つまり、#146(15), #147(21) の光子数状態 $\varphi_n$) も|1,2⟩に加える必要がある。(#144-145の議論参照)

すなわち、

電子系　　光子系

$$|j\rangle = \{|\phi_j\rangle \exp(-i\omega_j t)\}\ \left\{|n_j\rangle \exp\left[-i\left(n_j + \frac{1}{2}\right)\omega_o t\right]\right\} \qquad (42)$$

と表される。ただし、$j = 1$(始状態), または, 2(終状態)であり,

- $(\hbar\omega_j)$は、それぞれ始状態と終状態の電子のエネルギー
- $\omega_o$は光の角周波数。$n_1$と$n_2$は、それぞれ始状態と終状態の光子数

# 半古典モデルに修正を加える②

(41)の$\Delta V(t)$ は、#97(13)より、$\Delta V = -\mu_x E$

半古典モデルでは、光電界$E$を古典場として扱ったが、<u>今回は、光電界の量子化表現を用いる</u>。#138(1), #156(25)より、

$$E(x,t) = q(t)\ D\sin(kz)\ , \qquad \hat{q} = \sqrt{\frac{\hbar}{2}}\left(\hat{a} + \hat{a}^{\dagger}\right)$$

なので、

$$\Delta V \propto -\mu_x \left(\hat{a} + \hat{a}^{\dagger}\right) \tag{43}$$

∴ (41)に(42), (43)を代入して、

$$\frac{dc_2}{dt} \propto \frac{i}{\hbar}\langle n_2|\langle\phi_2|\mu_x\left(\hat{a} + \hat{a}^{\dagger}\right)|\phi_1\rangle\,|n_1\rangle \exp\{i[(\omega_2 - \omega_1) + (n_2 - n_1)\omega_o]t\}$$

$$= \frac{i}{\hbar}\underline{\langle\phi_2|\mu_x|\phi_1\rangle}\ \underline{\langle n_2|\hat{a} + \hat{a}^{\dagger}|n_1\rangle}\ \underline{\exp\{i[\omega_{21} + (n_2 - n_1)\omega_o]t\}} \tag{44}$$

電子系の項　光の項　時間変化の項

フェルミの黄金律（エネルギー保存則）に対応

ただし、$\omega_{21} \equiv \omega_2 - \omega_1$

※ここでは、シュレデンィンガー表示を用い、波動関数が時間変化をしているとしている。一方、ハイゼンベルグ表示を用いる場合は、波動関数ではなく演算子$\hat{a}$と$\hat{a}^{\dagger}$に時間の項が加わる。

# 光と電子の相互作用

新たに追加された光の量子論の項 $\langle n_2|\hat{a}+\hat{a}^\dagger|n_1\rangle$ の効果を考える。

$$\langle n_2|\hat{a}+\hat{a}^\dagger|n_1\rangle = \langle n_2|\hat{a}|n_1\rangle + \langle n_2|\hat{a}^\dagger|n_1\rangle$$

この項が非零になるのは、#160(37), (38)より、以下の2つの場合のみ

① $n_2 = n_1 - 1$ のとき: $|\langle n_1-1|\hat{a}|n_1\rangle|^2 = n_1$　(光子が一つ減る)

② $n_2 = n_1 + 1$ のとき: $|\langle n_1+1|\hat{a}^\dagger|n_1\rangle|^2 = n_1+1$　(光子が一つ増える)

## ①のとき（光吸収）

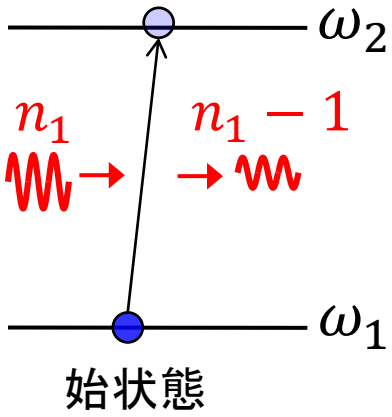
$$(44) \rightarrow \frac{dc_2}{dt} \propto \frac{i}{\hbar}\langle\phi_2|\mu_x|\phi_1\rangle\, n_1 \exp\{i(\omega_{21}-\omega_o)t\}$$

半古典モデルで得た選択則と同じ

始状態の光子数に比例

フェルミの黄金律より $\omega_{21}-\omega_o = 0$ が必要

$$\omega_2 - \omega_1 = \omega_o$$



# 光と電子の相互作用

① $n_2 = n_1 - 1$ のとき：$|\langle n_1 - 1|\hat{a}|n_1\rangle|^2 = n_1$　(光子が一つ減る)

② $n_2 = n_1 + 1$ のとき：$|\langle n_1 + 1|\hat{a}^\dagger|n_1\rangle|^2 = n_1 + 1$　(光子が一つ増える)

## ②のとき（誘導放出・自然放出）

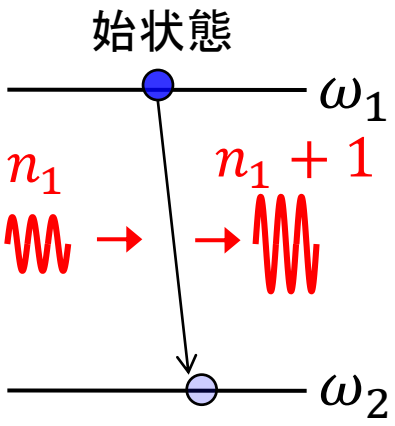
$$(44) \rightarrow \frac{dc_2}{dt} \propto \frac{i}{\hbar}\langle\phi_2|\mu_x|\phi_1\rangle\,(n_1 + 1)\exp\{i(\omega_{21} + \omega_o)t\}$$

始状態の光子数に比例
➔ 誘導放出

始状態の光子数と関係なく放出される（$n_1 = 0$ でも放出）
➔ 自然放出

フェルミの黄金律より
$\omega_{21} + \omega_o = 0$ が必要

$$\omega_1 - \omega_2 = \omega_o$$



# これまで(7-10)のまとめ

- 真空場揺らぎ(量子雑音)や自然放出光などを導出するには、電子に加えて、光も量子論的に扱う必要がある
- まず、光の電界・磁界を空間モードとして記述し、その振幅を$p, q$を用いて表す(単なる式変形。ここまでは古典論。)
  - その結果、ハミルトニアン(エネルギー)が一次元調和振動子と同じ形になる
- $p$を演算子$\hat{p} \equiv -i\hbar(\partial/\partial q)$に置き換えることで、光の量子化を行う
  - その結果、プランクのエネルギー量子仮説が導かれる。すなわち、光のエネルギーはとびとびの値しか許されない。その単位は$\hbar\omega$。
  - 光のエネルギー固有状態を光子数状態と呼ぶ
  - 真空場揺らぎ:光子数=0でも、エネルギーが存在し、振幅の確率分布が非零
- レーザー光など、一般的な「正弦波状の光」は、コヒーレント光状態と呼ばれる
  - コヒーレント光状態は、複数の光子数状態の線形和で表される
  - 平均光子数の増加とともに、量子雑音が相対的に小さくなる
  - 平均光子数$\rightarrow\infty$の極限が、古典的な光

# これまで(7-10)のまとめ

- 複素電界の演算子$\hat{a}, \hat{a}^\dagger$を用いると、よりエレガントに記述できる
  - $\hat{a}$と$\hat{a}^\dagger$の交換関係$[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1$が量子力学的性質の起源となる
  - $\hat{a}^\dagger\hat{a}$は光子数の演算子になる
- 一次摂動論において、光の量子状態をきちんと考慮することで、自然放出が導出される
  - 光電界による摂動を、古典場$E$ではなく、きちんと演算子$\hat{a}, \hat{a}^\dagger$を用いて表す
  - 始状態と終状態に、電子に加えて光の量子状態も入れる
  - その結果、$\hat{a}^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle$ の“1”の項により、自然放出光が発生する

# 期末試験

- 日時：1/21（火）13：00～15：00頃
- 場所：電気系会議室4（12F）
- 持ち込み不可
- 試験範囲：前半（小関先生）＋後半（種村）

※持ち込み不可ですが、後半に関しては、
細かい記憶を問うような問題は出しません。