光電子工学I 後半

～光と物質の相互作用～

2019年度冬学期

種村拓夫

東京大学大学院工学系研究科
電気系工学専攻

講義内容

- 講義日程：11/12, 11/19, 11/26, 12/3, 12/10, 12/17, 1/7 （7回）
- 評価：たまにレポート（宿題）＋期末試験
- 期末試験（予定）
  - 日時：1月下旬～2月上旬（試験期間中）
  - 持ち込み不可（細かい記憶を問うような問題は出しません。）

  ※最新の情報は、下記URLと電気系掲示板に掲示するので注意すること。
- 参考書：
  - ファインマン「ファインマン物理学 II, III, IV」 岩波書店.
    （出来れば原著がお薦め。ネット上で無料公開されてます。）
  - 江馬一弘「光物理学の基礎 - 物質中の光の振る舞い - 」朝倉書店.
  - 菊池和朗「光ファイバ通信の基礎」昭晃堂. （第3章）
  - 小出昭一郎「量子力学I, Ⅱ」（裳華房）.
  - D.A.B. Miller, “Quantum Mechanics for Scientists and Engineers (Cambridge).
- 講義スライド・配布資料

  www.ee.t.u-tokyo.ac.jp/~tanemura/lecture/OE/

アウトライン

I. はじめに

II. 光と物質の相互作用

- 物質の中の光
  1. 波動方程式，複素屈折率と減衰率

１回目

  2. 因果律とクラマース・クローニッヒの関係式
- 光に対する物質の応答

２回目

  3. 金属の光学応答：ドルーデモデル
  4. 金属以外の光学応答：ローレンツモデル

３回目

  5. 半古典的モデルによる物質の光学応答
  6. 半導体の光学応答

４回目

III. 光の量子論の基礎

５回目

  7. 粒子性と波動性
  8. 電磁界の量子化：光子数状態・コヒーレント状態

6回目

  9. 昇降演算子
  10. 自然放出

7回目

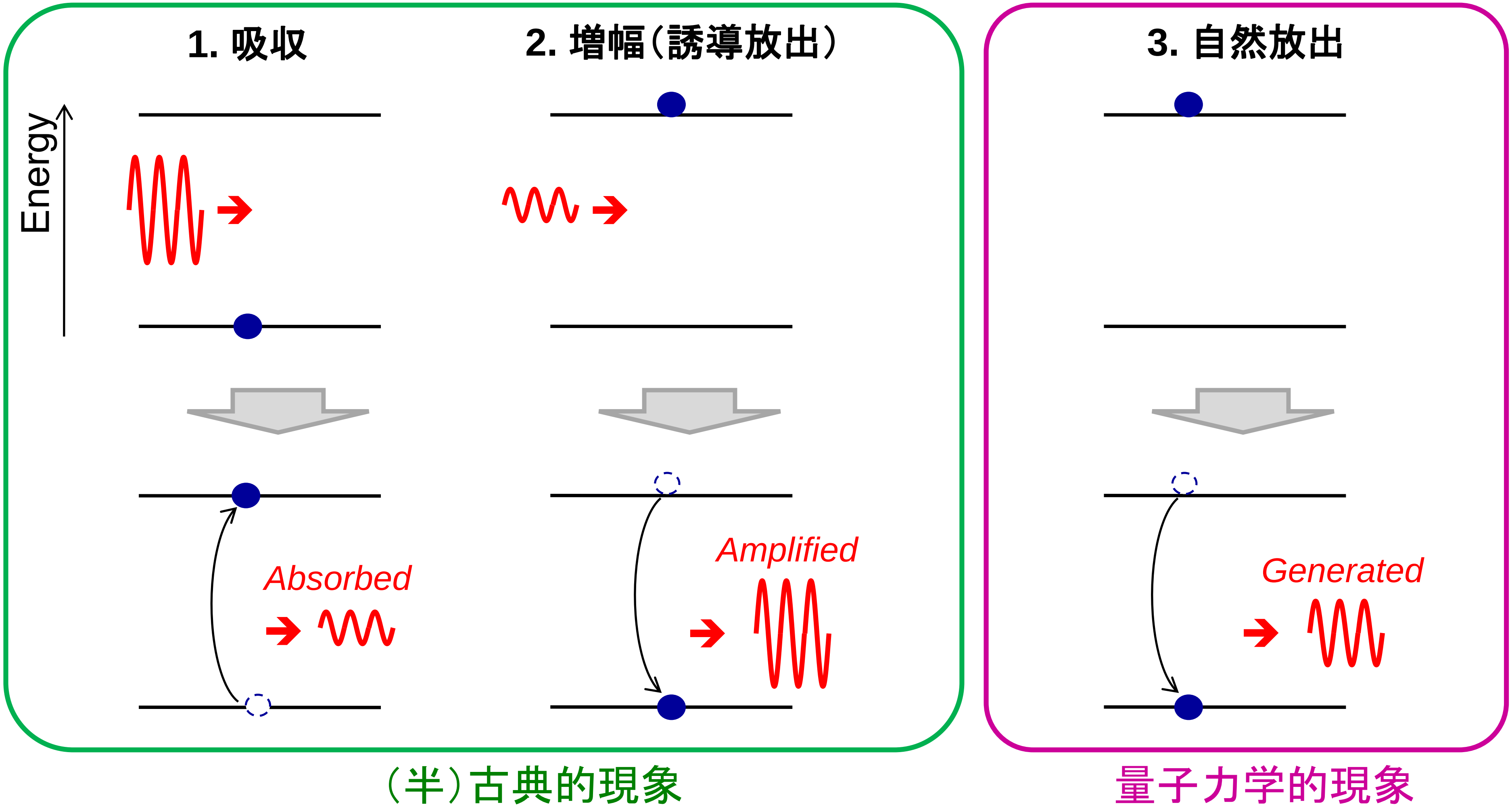
なぜ、「光と物質の相互作用」を学ぶのか？

- 「光」は電磁波の一種であり、真空中を速度cで伝搬する。
  - ➔光の伝搬・回折・干渉だけでも十分に奥深い物理現象であり、電磁気学、フーリエ光学、幾何光学など、様々な理論体系を用いて記述される。（小関先生の講義）
- 一方、光の発生・屈折・散乱・反射・吸収（増幅）は、物質が存在して初めて生じる現象である。
  - 物質がなければ、光の存在を認識することすらできない。
    例：人間の視覚（光と網膜の相互作用），デジカメ（光と半導体の相互作用）
  - 光は単独では無力。光と物質が出会うことで何かが始まる。
- 「光が物質と出会うと何が起こるか？」「物質の中で光がどうなっているか？」を学ぶことは、光学の原理を理解する上で基本である。※
  - ➔しかし、きちんと記述するには、煩雑な計算や、場の量子論・固体物性の理解が必要になる。到底、7回の講義では教えきれない。
- 本講義（後半）では、エッセンスのみを教えることを目指す。細かいことは、必要に応じて後で勉強すれば良い。

※江馬一弘「光物理学の基礎」，はじめに．

光と物質の相互作用(1/2)

- 光の「吸収」「増幅」「放出」は、下図を用いてよく説明される。
- この図の意味は？ なぜ吸収／増幅したり放出したりできるのか？



光と物質の相互作用(2/2)

- 実は、光の「屈折」も、「吸収」「増幅」とほとんど同じ現象。
  非常に密接な関係がある。どういうことか？

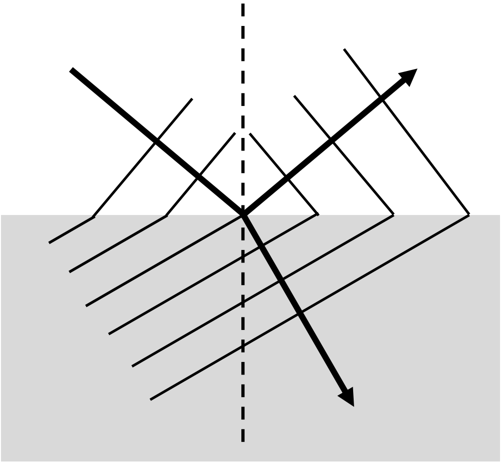
- そもそも、屈折を表す「屈折率」とは何か？

  〔高校で習う定義〕

  真空中の光速 c を「媒質中の光の速度v」で割ったもの

  ➔結果、媒質中の波長 λ は、真空中の波長 λ_0 に比べて $1/n$ になる

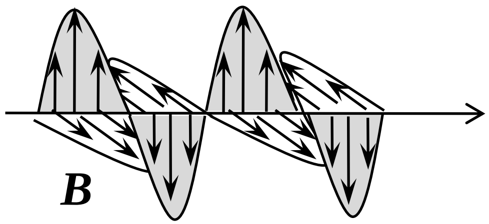
  ➔屈折(スネル)や反射(フレネル)の法則が導出される。



- なぜ、媒質中では光の速度は遅いのか？

まずはじめに、「相互作用」の正体

- 光（電磁波）は電場$\boldsymbol{E}$と磁場$\boldsymbol{B}$からなる。



- しかし、物質との相互作用で重要なのは、$\boldsymbol{E}$の方。

∵物質中の荷電粒子（イオンや電子）に与えるローレンツ力は、$\boldsymbol{F}=q(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B})$
　一方、マクスウェル方程式を満たす$\boldsymbol{E}$と$\boldsymbol{B}$は、$|\boldsymbol{E}|=c|\boldsymbol{B}|$の関係がある。（※）
　従って、$\boldsymbol{B}$が物質中の電荷に及ぼす力は、$\boldsymbol{E}$による力の $|\boldsymbol{v}|/c$ 倍。
　　➔通常、荷電粒子の速度$|\boldsymbol{v}|$は光速cに比べて十分遅い。∴無視できる。

つまり、

「光と物質の相互作用」≈「光電界と物質中の電荷との相互作用」

と考えて、ほぼ問題ない。

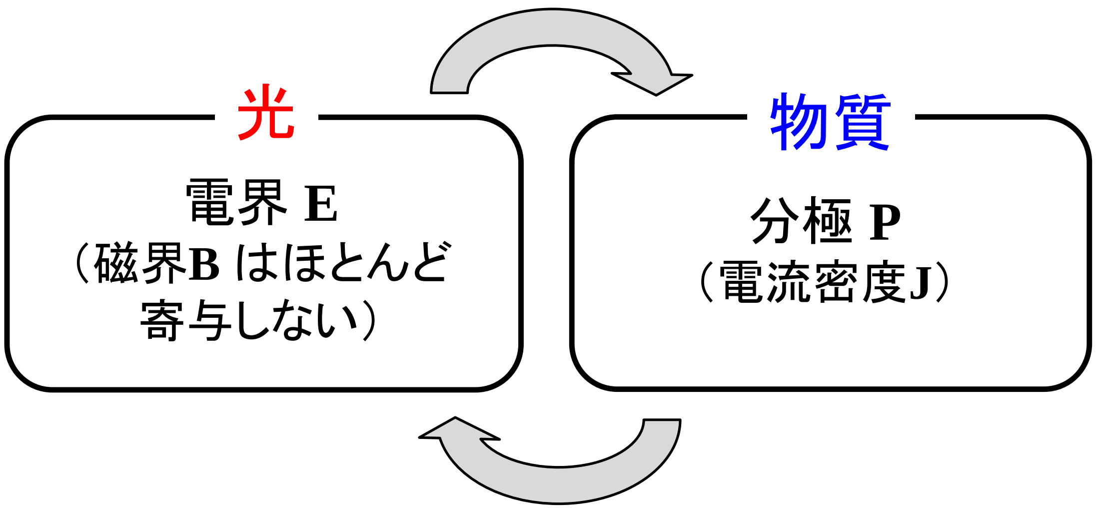
（※）江馬一弘「光物理学の基礎」, p. 33.

光と物質の相互作用

光に対する物質の応答:

<u>**E → P** の影響</u>
- 古典モデル(ドルーデモデル，ローレンツモデル)
- 半古典モデル(摂動理論)

②



物質の中の光:

<u>**P → E** の影響</u>
- マクスウェル方程式(波動方程式)

①

<u>自然放出光</u>
- 光の量子論

③

アウトライン

I. はじめに

II. 光と物質の相互作用

- **物質の中の光**
  1. **波動方程式，複素屈折率と減衰率**
  2. 因果律とクラマース・クローニッヒの関係式
- 光に対する物質の応答
  3. 金属の光学応答：ドルーデモデル
  4. 金属以外の光学応答：ローレンツモデル
  5. 半古典的モデルによる物質の光学応答
  6. 半導体の光学応答

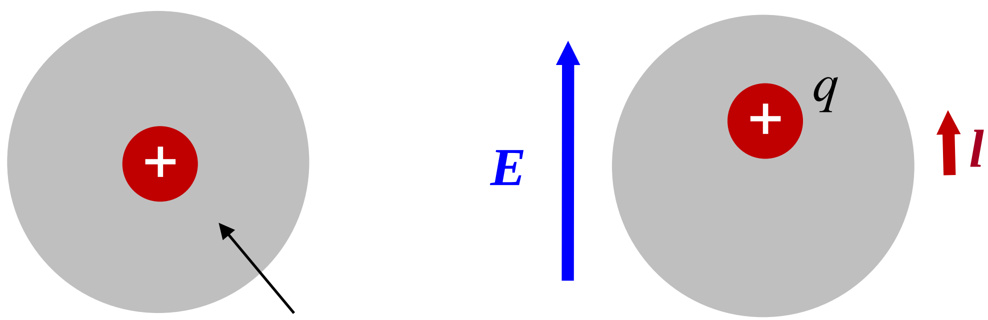
III. 光の量子論の基礎

7. 粒子性と波動性
8. 電磁界の量子化：光子数状態・コヒーレント状態
9. 昇降演算子
10. 自然放出

屈折率の起源：分極と双極子放射

◆**電子分極** (electronic polarization)

光電界なし　　　光電界があると



- の電荷雲

＋の電荷と - の電荷雲の中心がずれる

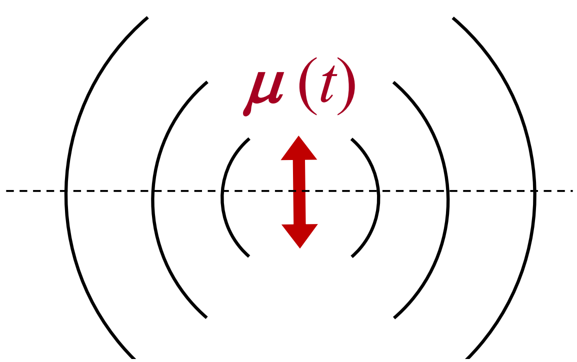
⇩

双極子モーメント (dipole moment)

$$\boldsymbol{\mu} = q\boldsymbol{l}$$

が発生

◆**双極子放射** (dipole radiation)



μ に垂直な方向に対称に放射

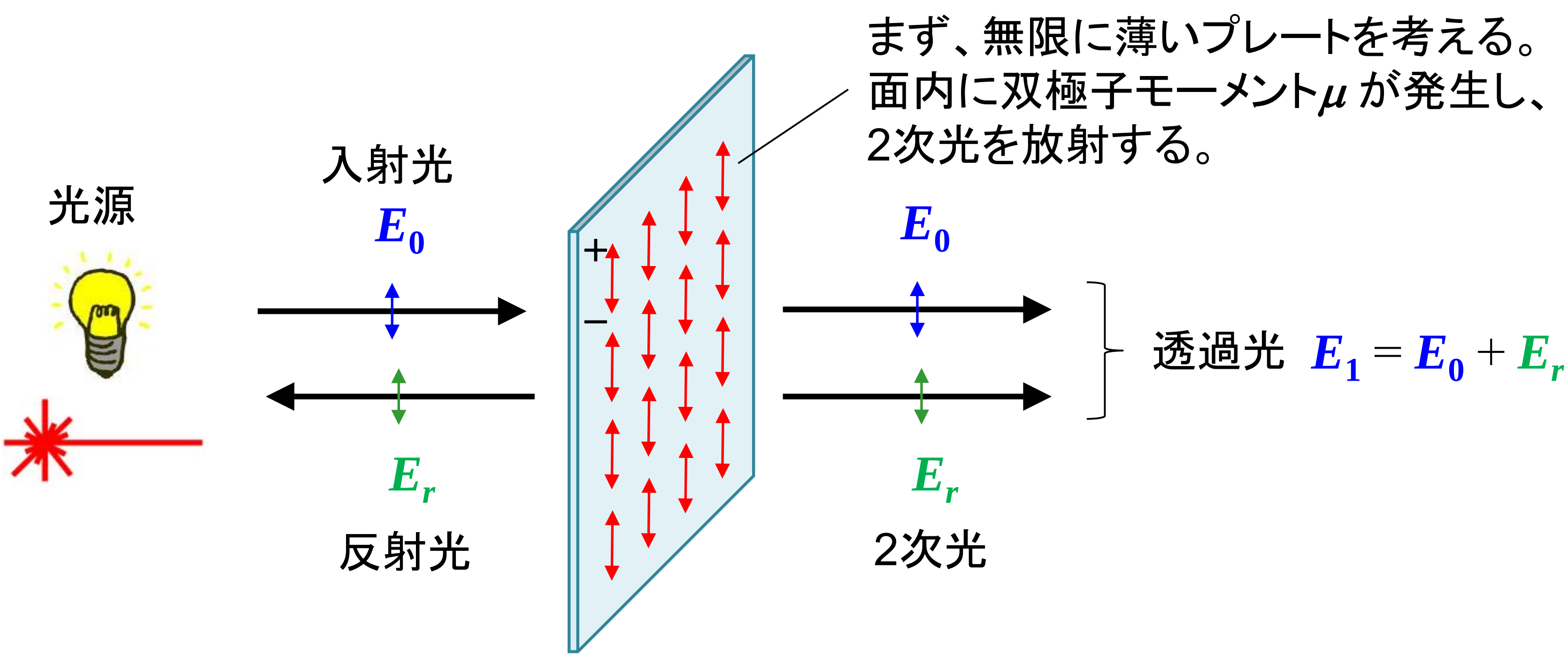
高速（＝光の周波数）に振動する双極子モーメントにより、振動する電界が新たに発生する。
➔ 電磁波（2次光）が放射される。※

※ “2次光”という呼び方はそれほど一般的ではないが、本講義では、便宜上そう呼ぶことにする。
なぜ放射するかは、電磁気学（アンペールの法則＋電磁誘導の法則）から導かれる。例えば、「ファインマン物理学 II 第3章」, を参照のこと。

屈折率の起源：媒質を通るとどうなるか？

◆重ね合わせの理

- 外部光源からの光（電界E_0）を媒質に入射すると、その透過光は、
  ①仮に媒質が存在しなかった場合の光、つまり、E_0がただ伝搬したもの
  ②媒質中に発生する双極子モーメントμによって放射される光（2次光）E_r
  の線形和になる。
- 2次光は、μに垂直な方向に対称に発生するので、結果として反射光も生じる。



屈折率の起源：なぜ透過光は遅れるか？

ここで、2次光 $\boldsymbol{E}_r \propto -\dfrac{\partial \boldsymbol{\mu}}{\partial t}$

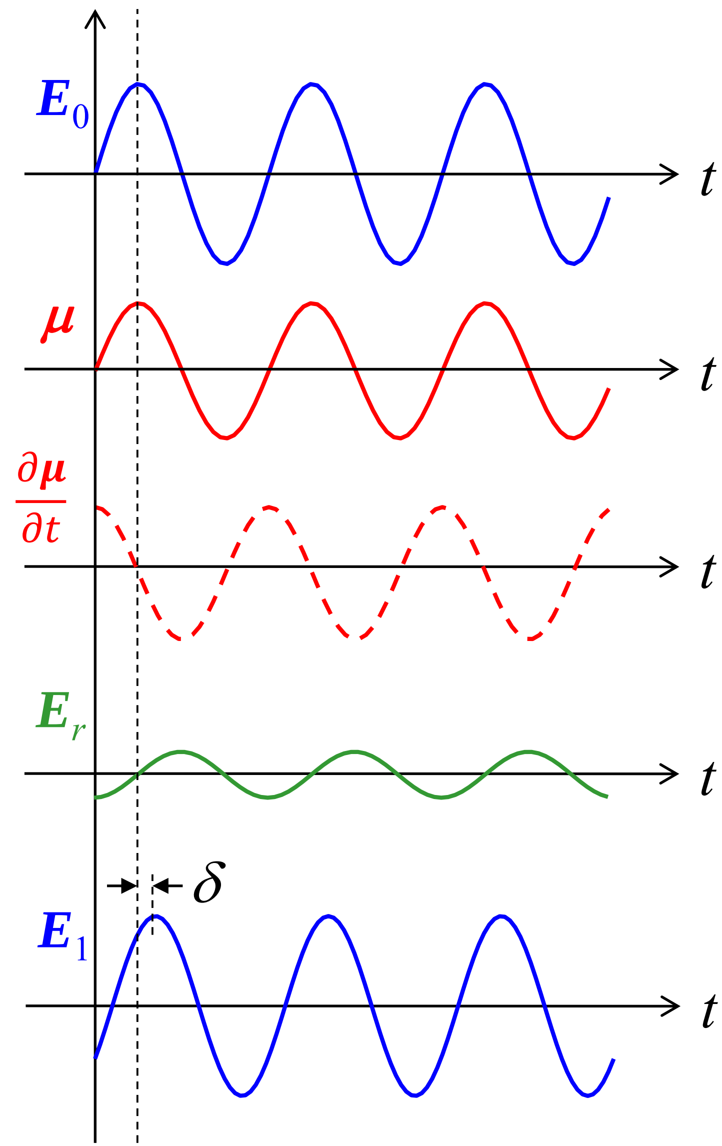
（江馬,「光物理学の基礎」, p. 176）

仮に、$\boldsymbol{\mu}(t)$ が $\boldsymbol{E}_0(t)$に比例して同相で振動すると仮定すると※、2次光$\boldsymbol{E}_r(t)$と透過光$\boldsymbol{E}_1(t)$の時間変化は、右図のようになる。

※後で説明するように、複素感受率が実数の場合に相当する。吸収のない誘電体が該当する。

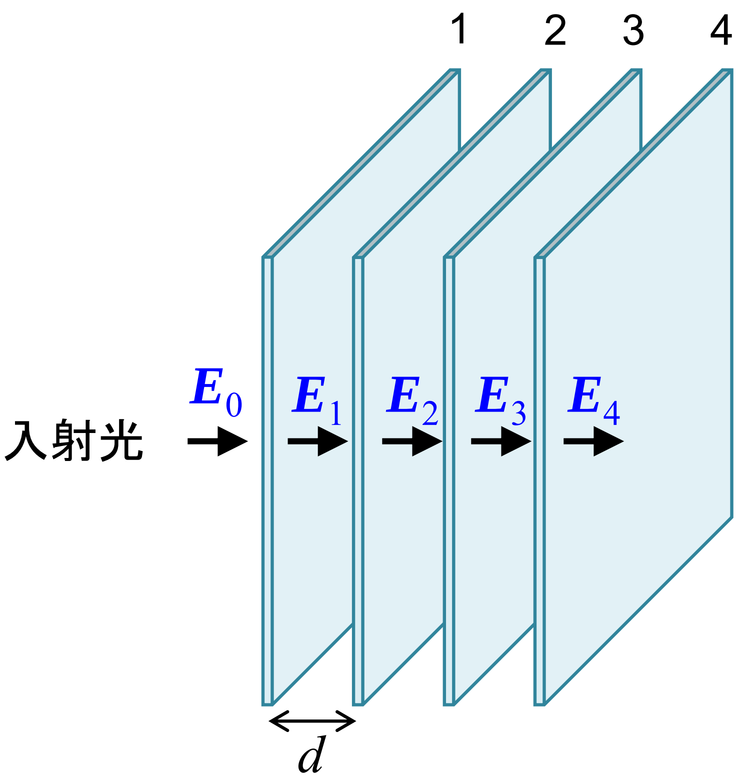
結果として、$\boldsymbol{E}_1(t)$は $\boldsymbol{E}_0(t)$に比べて位相がδ（＞0）遅れる。

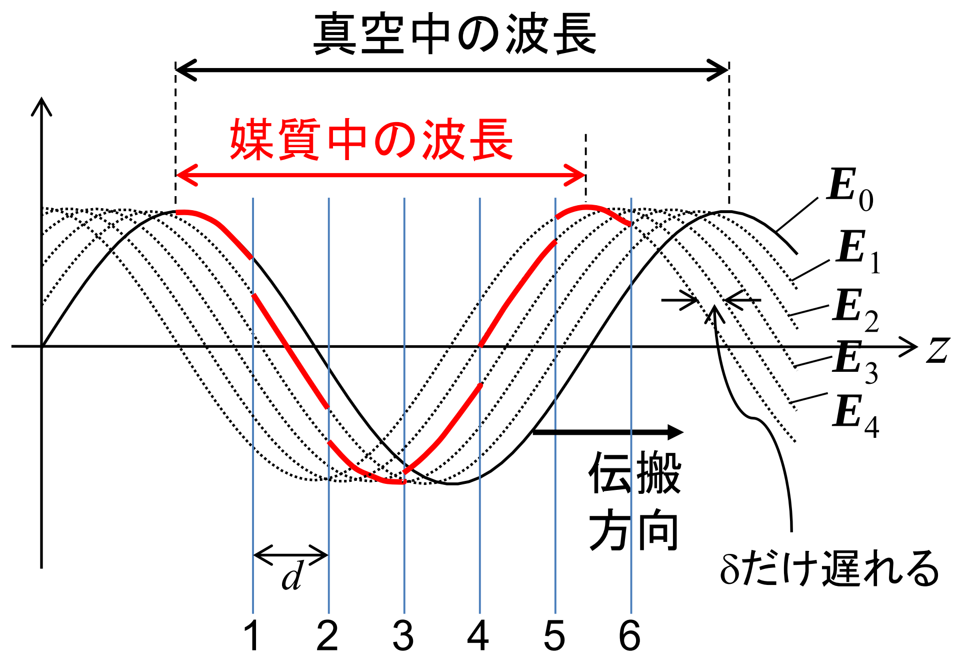
$$\because A\sin\omega t - \Delta A\cos\omega t = A'\sin(\omega t - \delta)$$



屈折率の起源：なぜ波長は短くなるか？

- 実際の媒質は、このような無限に薄いプレートが多段に存在しているものと考えられる。
- プレートを通過する度に時間波形が遅れるとすると、確かに媒質中の波長は短くなる！





※実際は、dは無限小。上図は分かり易く大げさに描いている。

定量的に理解するために、マクスウェルの方程式から考える。

マクスウェルの方程式

電磁誘導	$\nabla \times \mathbf{E} = -\dfrac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$	(1)
アンペール	$\nabla \times \mathbf{H} = \dfrac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{J}$	(2)
ガウス	$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho$	(3)
磁束の連続性	$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$	(4)

電気学会「電気磁気学基礎論」(河野, 桂井, 岡部 著), p. 182.

ただし

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} \qquad (5)$$

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} \qquad (6)$$

また、透磁率 $\mu = \mu_0$（真空中の透磁率）と仮定

(5), (6) を(2)に代入して

$$\nabla \times \mathbf{B} = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \mu_0 \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} + \mu_0 \mathbf{J} \qquad (2')$$

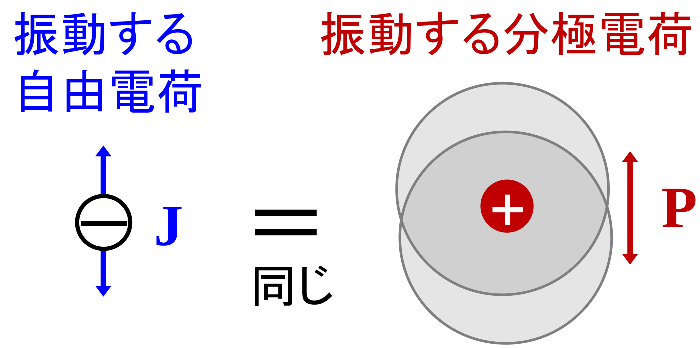
(5) を(3)に代入して

$$\nabla \cdot (\varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}) = \rho \qquad (3')$$

自由電荷と分極電荷は本質的に同じもの

$$\nabla \times \mathbf{B} = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \mu_0 \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} + \mu_0 \mathbf{J} \qquad (2')$$

$$\nabla \cdot (\varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}) = \rho \qquad (3')$$



- ここで、**J**は"電流密度"であるが、我々が通常イメージする直流(DC)電流や高々GHz程度の交流(AC)電流ではない。
- このあと導出するように、いま我々は、光の周波数ω(THz以上)で高速に振動する電場**E**と磁場**B** の変化に興味があるのであって、これらに影響を与えるのは、同じ周波数ωで振動する**P**と**J**のみ。(線形システムの考え方)
- つまり、**J**は "THz以上で高速に振動する電流密度"のこと。もはや、**J**と分極の時間変化∂**P**/∂t に本質的な区別はない。(もともと電磁気学的に区別はない。人間が勝手に区別しただけ。変位電流の考え方も同じ。)
- 同様に、自由電荷密度ρも "THz以上で高速に変化する電荷密度"であり、分極電荷 -∇·**P** と本質的に区別はない。
- そこで、便宜上、 全て分極電荷として考え、**J** = 0 , ρ = 0 として良い。

マクスウェルの方程式

∴ マクスウェルの方程式は、$\mathbf{E}$, $\mathbf{B}$の式として

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \qquad (1)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \mu_0 \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} \qquad (2)$$

$$\nabla \cdot (\varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}) = 0 \qquad (3)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \qquad (4)$$

いま、$\varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} = \varepsilon \mathbf{E}$（$\varepsilon$ は媒質中の誘電率）と表す。

一般に、屈折率が空間的に一様でない媒質中では、ε は場所によって変化する。しかし、ここでは簡単のため、$\mathbf{E}$の変化に比べてεは空間的に一様だと仮定し（※）、(3)の左辺を $\nabla \cdot (\varepsilon \mathbf{E}) \approx \varepsilon(\nabla \cdot \mathbf{E})$と近似すると、(3)から $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$ が得られる。

（※）この仮定はゴマカシで多くの場合正しくない。納得いかない人は、江馬一弘『光物理学の基礎』42-46頁を参照のこと。一般に、電界$\mathbf{E}$は、$\nabla \cdot \mathbf{E}_T = 0$ を満たす“横波成分” $\mathbf{E}_T$とそれ以外の“縦波成分” $\mathbf{E}_L$の足し合わせとして考えることができる。これ以降の議論は、$\mathbf{E}_T$ に対して厳密に成立する。電磁波は横波なので、本講義では簡単のため$|\mathbf{E}_T| \gg |\mathbf{E}_L|$とし、$\mathbf{E}_T$の現象のみを議論している。

波動方程式

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \qquad (1)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \mu_0 \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} \qquad (2)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0 \qquad (3')$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \qquad (4)$$

(1), (2), (3’) と、ベクトル公式 $\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}) - \nabla^2 \mathbf{E}$ を用いると、以下の波動方程式が得られる。

◆波動方程式

$$\nabla^2 \mathbf{E} = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} + \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{P}}{\partial t^2} \qquad (5)$$

この式が, どのように“波動”や“波の伝搬”を表すのか?

複素電界／分極ベクトル

$$\nabla^2\mathbf{E} = \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial^2\mathbf{E}}{\partial t^2} + \mu_0\frac{\partial^2\mathbf{P}}{\partial t^2} \qquad (5)$$

Eや**P**が $\cos(\omega t)$ のように時間的に振動しているとき、何が起きるか？

➔ sin, cosよりも、複素数 で考えた方が分かりやすい。

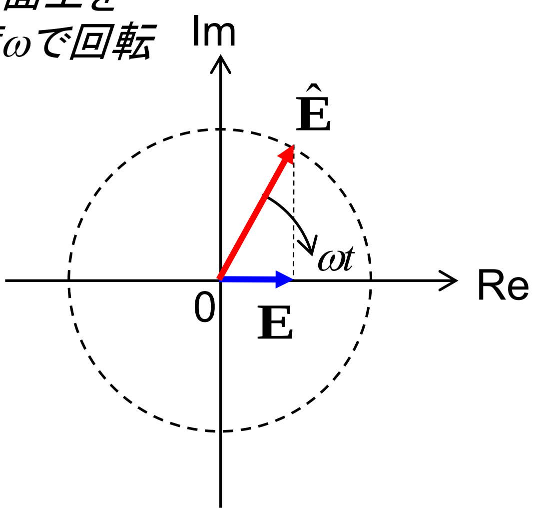
- ✓ 三角関数の公式を覚えなくて済む。
- ✓ 位相遅れ／進みも、掛け算で表すことができる。(= 線形システム)
- ✓ 複素平面上で視覚的に理解することができる。

そこで、

$$\begin{cases} \underline{\mathbf{E}(\mathbf{r},t)} \equiv \mathrm{Re}\left(\underline{\hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r},t)}\right) & (6) \\ \underline{\mathbf{P}(\mathbf{r},t)} \equiv \mathrm{Re}\left(\underline{\hat{\mathbf{P}}(\mathbf{r},t)}\right) & (7) \end{cases}$$

実ベクトル　　複素ベクトル

複素平面上を
角速度ωで回転



と表す。正弦波(単色光)の場合は、

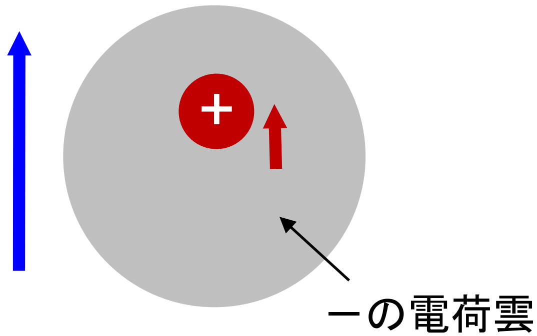
$$\begin{cases} \hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r},t) \equiv \underline{\tilde{\mathbf{E}}}\exp(-i\omega t) & (8) \\ \hat{\mathbf{P}}(\mathbf{r},t) \equiv \underline{\tilde{\mathbf{P}}}\exp(-i\omega t) & (9) \end{cases}$$

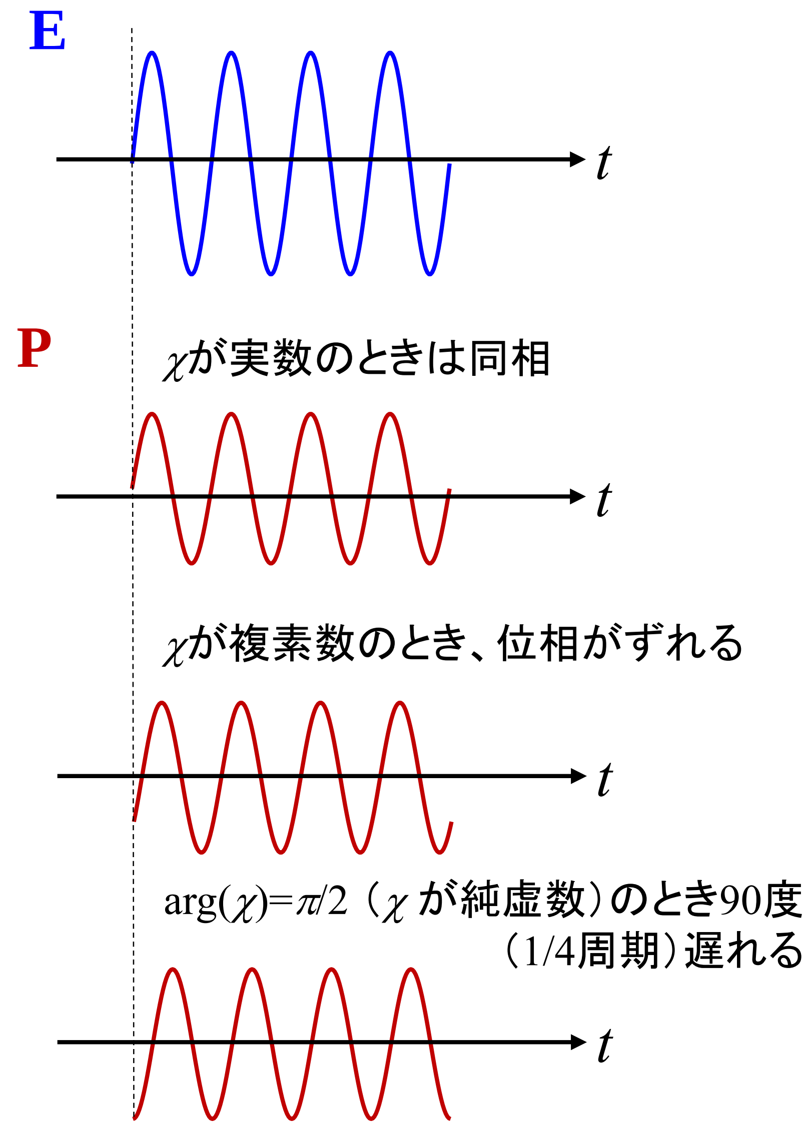
複素振幅(フェーザ)

複素感受率

単色光の場合を考える

$\hat{\mathbf{E}} \equiv \tilde{\mathbf{E}}\exp(-i\omega t)$　　$\hat{\mathbf{P}} \equiv \tilde{\mathbf{P}}\exp(-i\omega t)$





$\hat{\mathbf{E}}$が十分小さければ、
$\hat{\mathbf{P}}$は$\hat{\mathbf{E}}$に比例すると仮定でき、

$$\hat{\mathbf{P}} \equiv \varepsilon_0 \underline{\chi}\, \hat{\mathbf{E}} \qquad (1)$$

複素感受率

- χは一般に複素数
  - $|\chi|$: 応答の大きさ
  - $\arg(\chi)$: 位相遅れ
- χは一般にω の関数

波動方程式

#18 (5) ➔

$$\nabla^2 \hat{\mathbf{E}} = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \hat{\mathbf{E}}}{\partial t^2} + \mu_0 \frac{\partial^2 \hat{\mathbf{P}}}{\partial t^2}$$
$$= \varepsilon_0 \, \mu_0 \underline{\underline{(1+\chi)}} \frac{\partial^2 \hat{\mathbf{E}}}{\partial t^2} \qquad (1)$$

(比)誘電率(※) $\varepsilon \equiv 1 + \chi$ (2)
複素屈折率 $\hat{n} \equiv \sqrt{\varepsilon}$ (3)

(※)自明のときは、「比」を省略して、単に「誘電率」と呼ぶ。

と定義すると、波動方程式

$$\boxed{\nabla^2 \hat{\mathbf{E}} = \frac{\hat{n}^2}{c^2} \frac{\partial^2 \hat{\mathbf{E}}}{\partial t^2} \qquad (4)}$$

ただし、 $c \equiv \dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}$ (5) 真空中の光速

波動方程式の直観的イメージ

$$\boxed{\nabla^2 \hat{\mathbf{E}} = \frac{\hat{n}^2}{c^2}\frac{\partial^2 \hat{\mathbf{E}}}{\partial t^2} \qquad (4)}$$

この式が，どのように"波の伝搬"を表すのか?

x, y 方向に一様な媒質の場合を考えると，$\nabla^2 \hat{\mathbf{E}} = \frac{\partial^2}{\partial z^2}\hat{\mathbf{E}}$

$$\therefore (4) \Rightarrow \quad \underline{\underline{\left(\frac{\partial}{\partial z} + \frac{\hat{n}}{c}\frac{\partial}{\partial t}\right)}}\underline{\underline{\left(\frac{\partial}{\partial z} - \frac{\hat{n}}{c}\frac{\partial}{\partial t}\right)}}\hat{\mathbf{E}} = 0 \qquad (5)$$

$$\frac{\partial}{\partial z}\hat{\mathbf{E}} = -\frac{\hat{n}}{c}\frac{\partial}{\partial t}\hat{\mathbf{E}} \qquad (6)$$

← $+z$ 方向に伝搬する平面波

または

$$\frac{\partial}{\partial z}\hat{\mathbf{E}} = +\frac{\hat{n}}{c}\frac{\partial}{\partial t}\hat{\mathbf{E}} \qquad (7)$$

← $-z$ 方向に伝搬する平面波

（※）細かいことを言えば、$\hat{n}$がz方向に変化する場合は、$\frac{\partial \hat{n}}{\partial z} \neq 0$ なので(4)→(5)は正しくない。さらに、その場合でも、(5)→(6),(7) は自明ではない。（「(6) or (7)」は(5)の十分条件ではあるが、必要条件ではない。） 今は、一様な媒質中での波の伝搬と$\hat{n}$の意味を直観的に理解するために、波動方程式を厳密に解く代わりに(6), (7)を考える。

波動方程式の直観的イメージ

微分方程式の意味を直観的に理解するには？　→ 離散化して考えると良い。

∴　z 方向に離散化して考える。

$$\frac{\partial}{\partial z}\hat{\mathbf{E}} = -\frac{\hat{n}}{c}\frac{\partial}{\partial t}\hat{\mathbf{E}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\hat{\mathbf{E}}(z_0+\Delta z, t) = \hat{\mathbf{E}}(z_0, t) - \frac{\hat{n}\Delta z}{c}\frac{\partial}{\partial t}\hat{\mathbf{E}}(z_0, t)}$$

つまり、
- 次の場所（$z = z_0 + \Delta z$ ）の複素電界は、今の場所（$z = z_0$）の複素電界に $\partial\hat{\mathbf{E}}/\partial t$ に比例する複素数（x, y, z全成分を考えればベクトル）を加えることで得られる。
- その比例係数に$\hat{n}$が入っている。

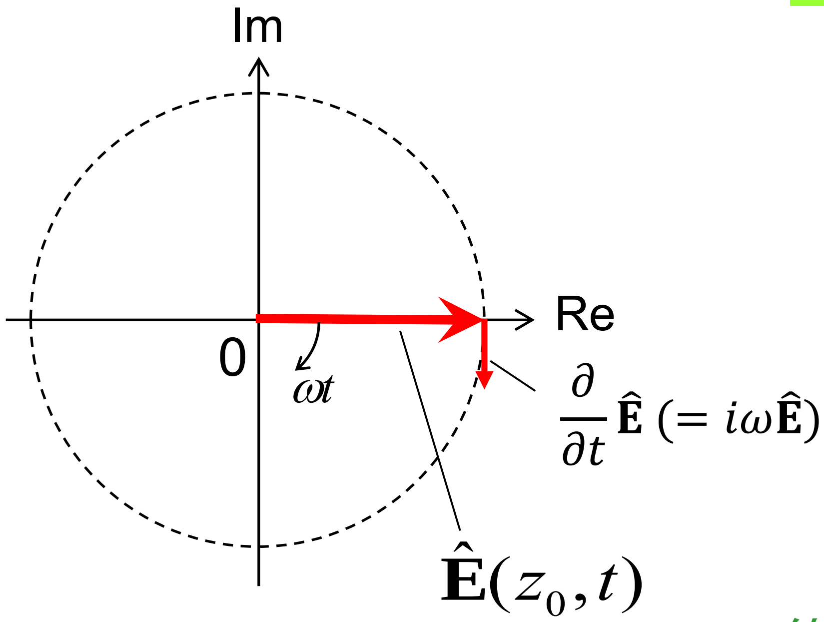
波の伝搬の直観的イメージ(1)

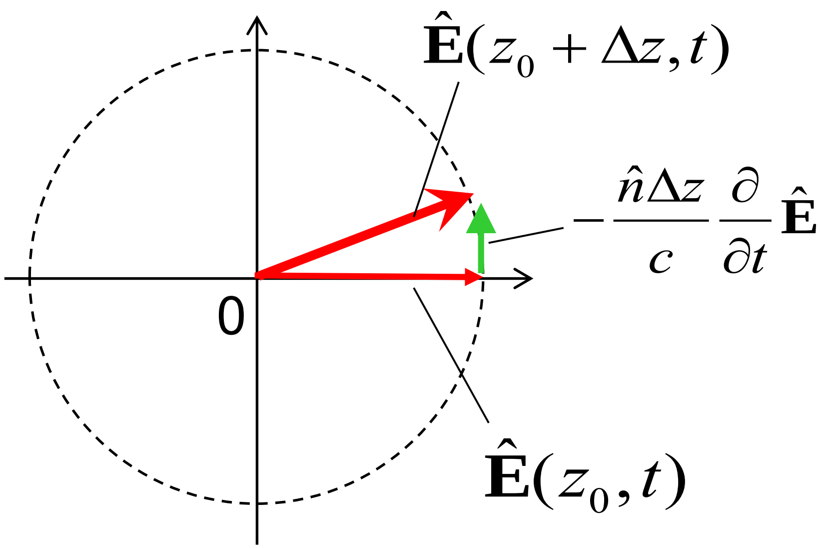
$$\hat{\mathbf{E}}(z_0+\Delta z,t)=\hat{\mathbf{E}}(z_0,t)-\frac{\hat{n}\Delta z}{c}\frac{\partial}{\partial t}\hat{\mathbf{E}}(z_0,t)$$

$z=z_0$ において

$z=z_0+\Delta z$ において

$\hat{n}$が実数のとき





位相回転(遅れ)のみ。$|\hat{\mathbf{E}}|$は変化しない。
位相は$\hat{n}$に比例して遅れる。

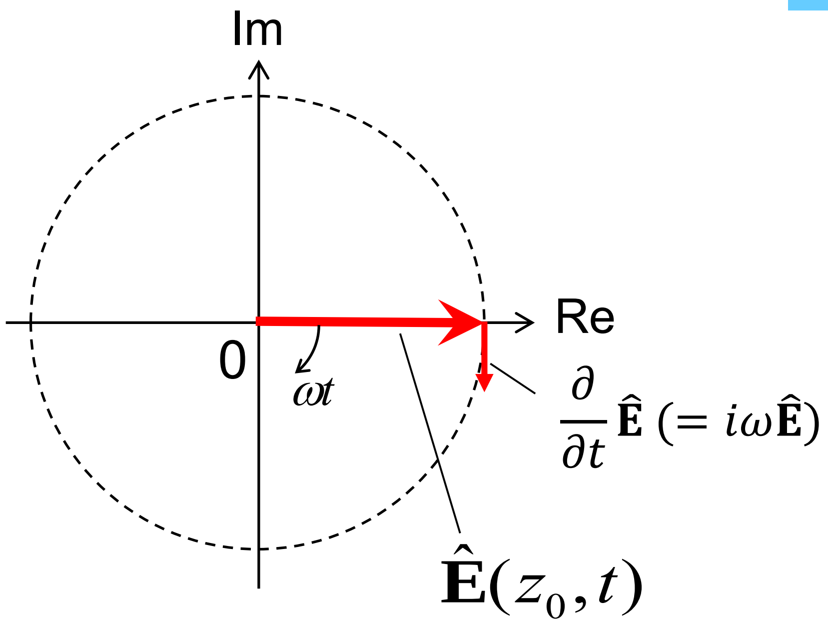
波の伝搬の直観的イメージ（2）

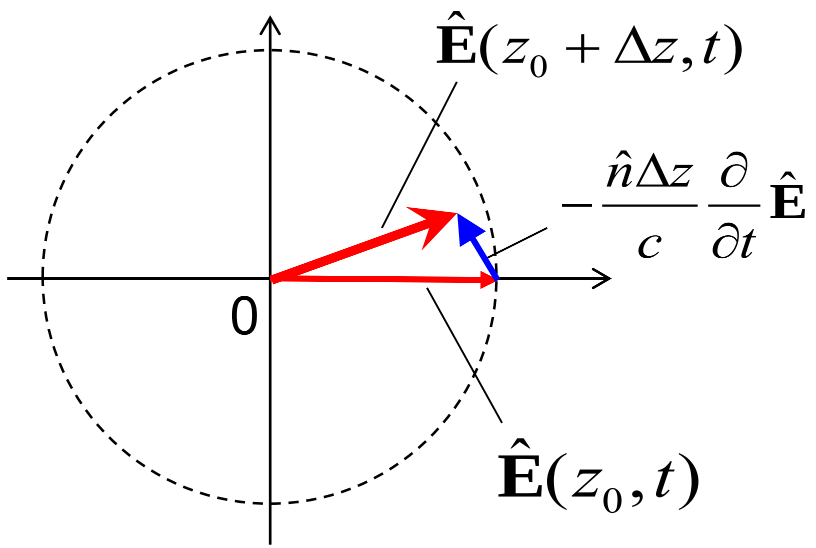
$$\hat{\mathbf{E}}(z_0+\Delta z,t)=\hat{\mathbf{E}}(z_0,t)-\frac{\hat{n}\Delta z}{c}\frac{\partial}{\partial t}\hat{\mathbf{E}}(z_0,t)$$

$z=z_0$ において

$z=z_0+\Delta z$ において

$\mathrm{Im}(\hat{n})>0$ のとき





$+z$ 方向に $|\hat{\mathbf{E}}|$ が小さくなる。➔減衰

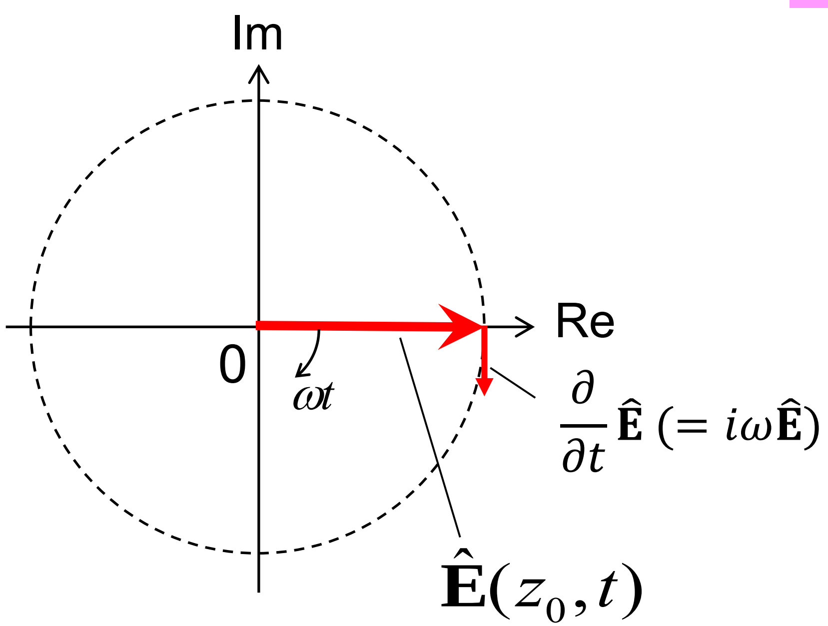
波の伝搬の直観的イメージ（3）

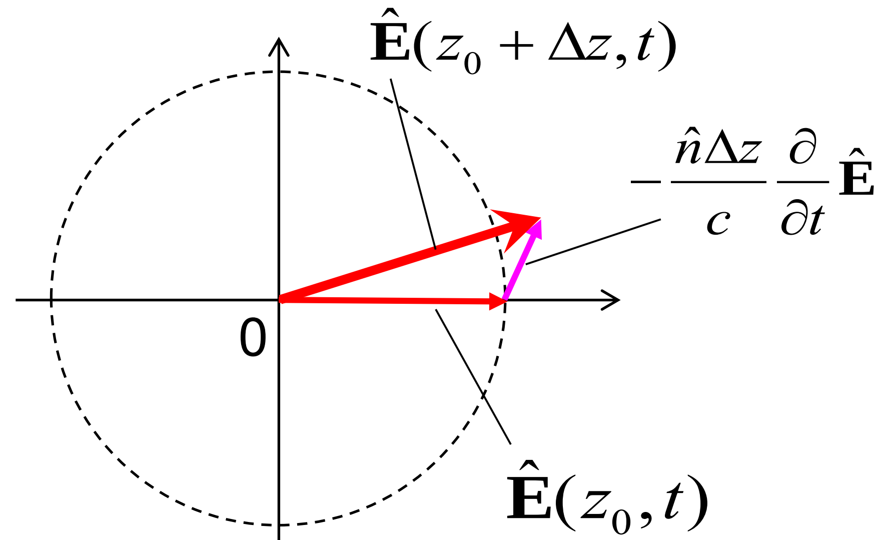
$$\hat{\mathbf{E}}(z_0+\Delta z,t)=\hat{\mathbf{E}}(z_0,t)-\frac{\hat{n}\Delta z}{c}\frac{\partial}{\partial t}\hat{\mathbf{E}}(z_0,t)$$

$z=z_0$ において

$z=z_0+\Delta z$ において

$\mathrm{Im}(\hat{n})<0$ のとき





$+z$方向に $|\hat{\mathbf{E}}|$ が大きくなる。➔増大

複素屈折率の意味

どうやら、複屈折率 $\hat{n}$ の実部が伝搬光の位相回転率、虚部が減衰率を表すようなので、

(実)屈折率	$n \equiv \mathrm{Re}(\hat{n})$	(1)
消衰係数	$\kappa \equiv \mathrm{Im}(\hat{n})$	(2)

$\Rightarrow \hat{n} = n + i\kappa$

と呼ぶことにする。

$\chi \equiv \chi_r + i\chi_i$ とすれば、

$$\begin{cases} n = & (3) \\ \kappa = & (4) \end{cases}$$

特に、$|n| \gg |\kappa|$のときは、

$$\begin{cases} n \approx \sqrt{1+\chi_r} & (5) \\ \kappa = \dfrac{\chi_i}{2n} & (6) \end{cases}$$

χ_rが大きいと、屈折率も大きい。
χ_i 成分があると、波は減衰／増大する。

波動方程式の解

単色光 $\hat{\mathbf{E}}(z,t) \equiv \tilde{\mathbf{E}}(z)\exp(-i\omega t)$のとき、

$$\frac{\partial}{\partial z}\hat{\mathbf{E}} = -\frac{\hat{n}}{c}\frac{\partial}{\partial t}\hat{\mathbf{E}} \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dz}\tilde{\mathbf{E}} = i\frac{\hat{n}\omega}{c}\tilde{\mathbf{E}} = \frac{(-\kappa + in)\omega}{c}\tilde{\mathbf{E}}$$

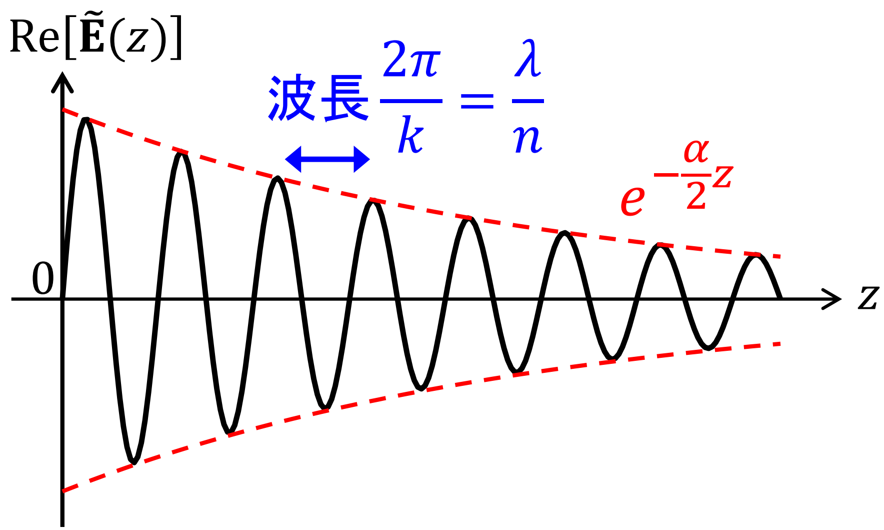
$$\Rightarrow \quad \tilde{\mathbf{E}}(z) = A\exp\left(-\frac{\alpha}{2}z\right)\cdot[\cos(kz) + i\sin(kz)]$$

(A は任意の複素数)

ただし、

波数	$k \equiv \dfrac{n\omega}{c}$	(1)
減衰定数(※)	$\alpha \equiv \dfrac{2\kappa\omega}{c}$	(2)

- 媒質中の波長は、真空中に比べて$1/n$になる。
- 光強度$\left|\tilde{\mathbf{E}}\right|^2$は、$e^{-\alpha z}$で減衰する。

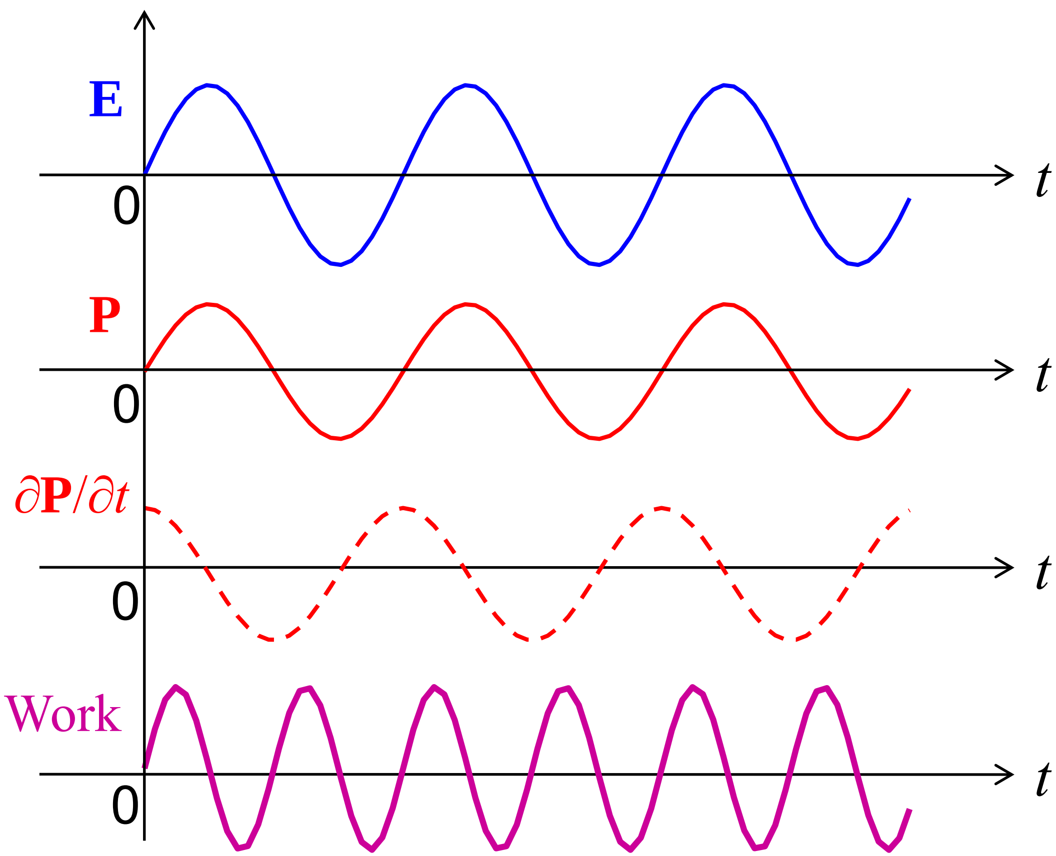


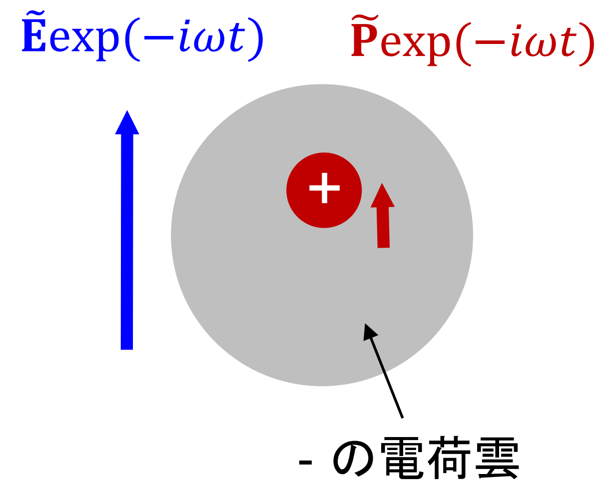
(※) α を吸収係数と呼ぶこともあるが適切ではない。後で説明するように、あくまでも、α は光の伝搬方向の“減衰”を表しているだけで、エネルギーが“吸収”されているとは限らないからである。

仕事とエネルギーによる説明

光電界が物質にする仕事率 $= \mathbf{F}\cdot\mathbf{v} \propto \mathbf{E}\cdot\dfrac{\partial \mathbf{P}}{\partial t}$

χ が実数 ($\chi_i = 0$)のとき　　$\mathbf{E}$ と $\mathbf{P}$ は同相





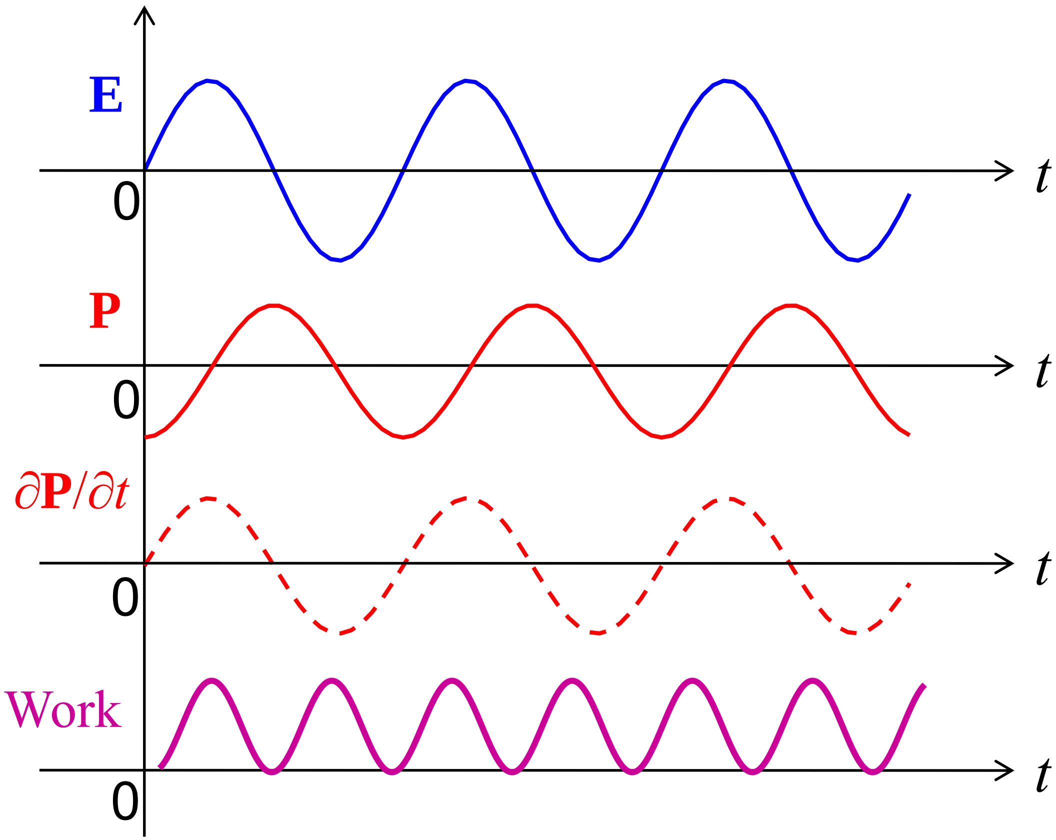
$\mathbf{P}(\omega) = \varepsilon_0 \chi(\omega) \mathbf{E}(\omega)$

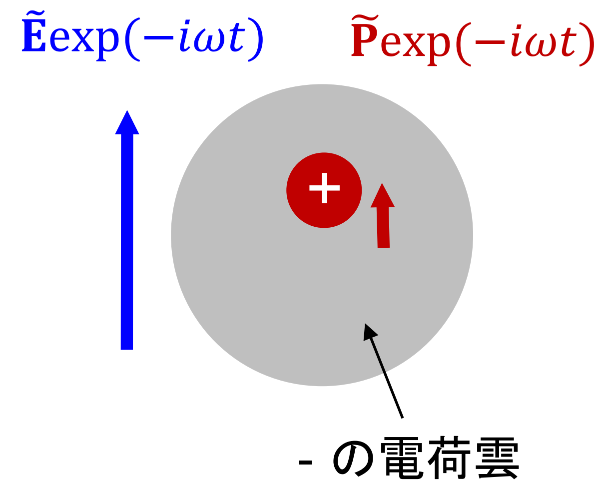
平均仕事量 = 0
エネルギーの増分なし。

仕事とエネルギーによる説明

光電界が物質にする仕事率 $= \mathbf{F}\cdot\mathbf{v} \propto \mathbf{E}\cdot\dfrac{\partial \mathbf{P}}{\partial t}$

$\boxed{\chi_r = 0,\ \chi_i > 0 \text{ のとき}}$　$\mathbf{E}$ に対して$\mathbf{P}$ は90度遅れる





$$\mathbf{P}(\omega) = \varepsilon_0 \chi(\omega) \mathbf{E}(\omega)$$

平均仕事量 > 0
光エネルギーが吸収される。

（注意）感受率と誘電率･屈折率の違い

感受率χは、あくまでも“物質（分極）の応答”を表す係数であり、波動方程式（元は、マクスウェル方程式）から導かれるものではない。
したがって、χ_iは、波の伝搬と関係なく“物質内の”エネルギー損失を表す。

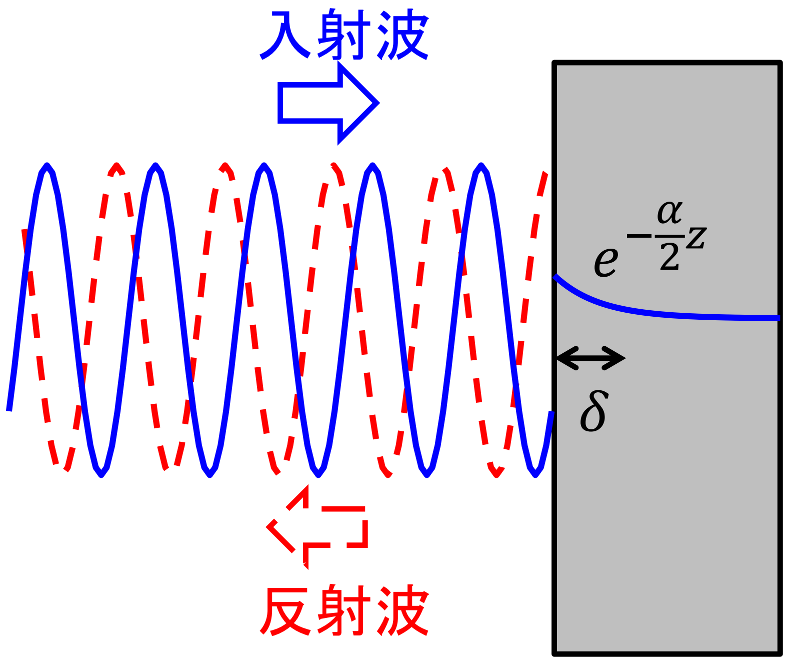
一方、誘電率 ε 、複屈折率 $\hat{n}$ 、消衰係数 κ 、減衰係数 α は、波動方程式を解いた結果として出てくるものであり、光の伝搬を含むマクロな光学特性を表す。
したがって、κやαは“伝搬に伴う”光の減衰を表す。

例えば、$|n| \gg |\kappa|$の場合、#26(5),(6)より、

$$
\begin{cases}
n \approx \sqrt{\varepsilon} = \sqrt{\underbrace{1}_{\text{1次光}} + \underbrace{\chi_r}_{\text{物質の応答（2次光）による寄与}}} \\[2ex]
\kappa = \dfrac{\chi_i}{2n} \approx \dfrac{\chi_i}{2\sqrt{\underbrace{1}_{\text{1次光}} + \chi_r}}
\end{cases}
$$

← “伝搬に伴う”光の減衰を表す。
χ_i そのものとは違う。

例：理想的な（吸収のない）金属ミラー



理想的な金属では、

- $n = 0$
- $\kappa > 0$

となる。（導出は後述）

金属内で、光強度$|E|^2$は、
$e^{-\alpha z}$　（$\alpha = 2\kappa\omega/c$）
で急速に“減衰”する。

しかし、100%反射されるので、
“エネルギーの損失”はない。

アウトライン

I. はじめに

II. 光と物質の相互作用

- 物質の中の光
  1. 波動方程式，複素屈折率と減衰率
  2. **因果律とクラマース・クローニッヒの関係式**
- 光に対する物質の応答
  3. 金属の光学応答：ドルーデモデル
  4. 金属以外の光学応答：ローレンツモデル
  5. 半古典的モデルによる物質の光学応答
  6. 半導体の光学応答

III. 光の量子論の基礎

7. 粒子性と波動性
8. 電磁界の量子化：光子数状態・コヒーレント状態
9. 昇降演算子
10. 自然放出

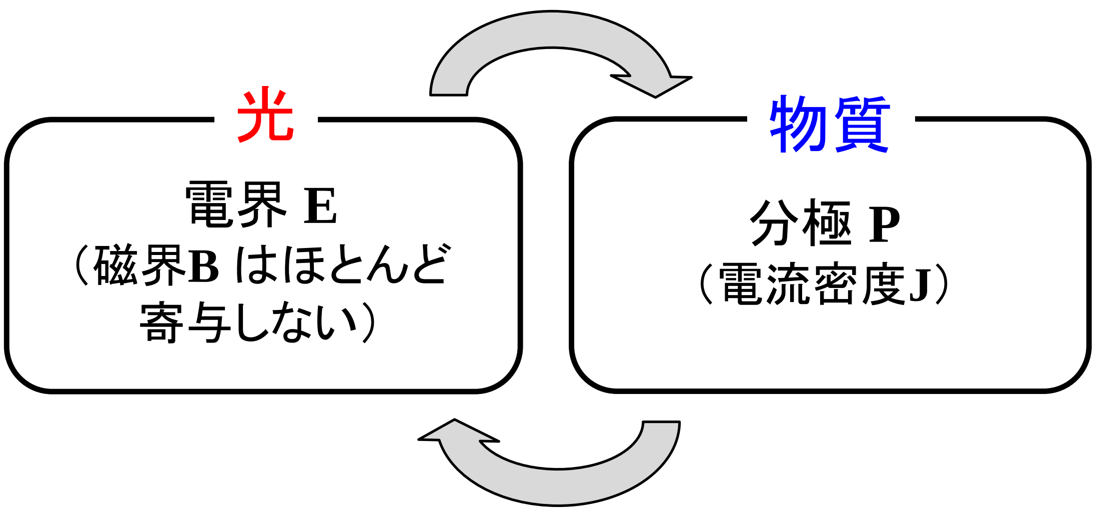
感受率$\chi(\omega)$ の条件

光と物質の相互作用

E → P の影響

物質を記述する方程式から求まる（感受率χ ）

- ドルーデモデル，ローレンツモデル
- 量子力学（半古典モデル）



P → E の影響

マクスウェル方程式から求まる（波動方程式）

→ 誘電率 ε、屈折率n、減衰率κ …

- ✓ E→Pを関連付ける$\chi(\omega)$の表式は、物質を記述する方程式から求まる。（後述する）
- ✓ しかし、具体的なケースを考える前に、個別の物質とは関係なく、**$\chi(\omega)$について普遍的に成立する法則**がある。

⇓

クラマース・クローニッヒの関係式

クラマース・クローニッヒ（Kramers Kronig）の関係式

複素感受率χの実部χ_r と虚部 χ_i は、完全に独立ではなく、
次式により相互に関係づけられる。

$$\chi_r(\omega) = -\frac{1}{\pi}\mathrm{P.V.}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\chi_i(\omega')}{\omega-\omega'}d\omega'$$

$$\chi_i(\omega) = \frac{1}{\pi}\mathrm{P.V.}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\chi_r(\omega')}{\omega-\omega'}d\omega'$$

※ただし、「P.V.」は、主値積分を表し、$\omega=\omega'$ の点では被積分値は0とする。

- 例えば、実部χ_rの周波数依存性が完璧に分かれば、χ_i は自動的に決まる。
- どういう意味か？
- そもそも、χ_r と χ_i の物理的な意味は？

χ_r と χ_i の直観的イメージ： 時間領域で考える！

周波数領域

$$\mathbf{P}(\omega) = \varepsilon_0 \chi(\omega)\mathbf{E}(\omega)$$

$\xrightarrow{F}$ フーリエ変換

時間領域

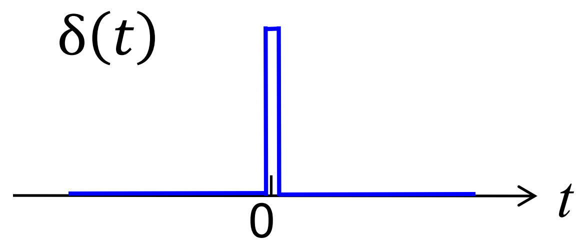
$$\mathbf{P}(t) = \varepsilon_0 \int_{-\infty}^{\infty} \chi(t')\mathbf{E}(t-t')dt'$$

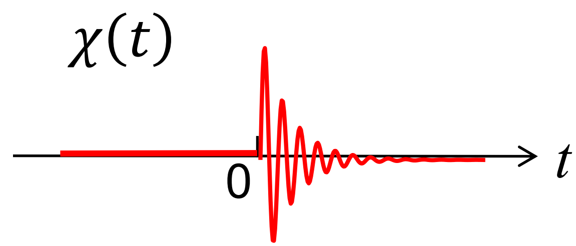
ただし、

$$\mathbf{P}(\omega) \xrightarrow{F} \mathbf{P}(t),$$

$$\mathbf{E}(\omega) \xrightarrow{F} \mathbf{E}(t),$$

$$\chi(\omega) \xrightarrow{F} \chi(t)$$





$\mathbf{E}(t) = \delta(t)$ のとき $\mathbf{P}(t) = \chi(t)$

インパルス　　インパルス応答

（補）クラマース・クローニッヒ関係式は、複素積分を用いて証明されることも多い（例えば、江馬「光物理学の基礎」p. 65）。本講義では、物理的な意味を直観的に理解するために、時間領域で導出する。

χ_r と χ_i の直観的イメージ： 時間領域で考える！

$$\chi(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\chi(\omega)e^{-i\omega t}d\omega$$
$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}[\chi_r(\omega)\cos\omega t + \chi_i(\omega)\sin\omega t]$$
$$+i[\chi_i(\omega)\cos\omega t - \chi_r(\omega)\sin\omega t]d\omega \qquad (1)$$

今、実分極ベクトル$\mathbf{P}(t)$の応答を考えているので、$\chi(t)$も実数。

上式の虚部が0になるためには、$\cos\omega t$がωに対して偶関数、$\sin\omega t$が奇関数であることを考慮して、

$$\boxed{\begin{cases}\chi_i(\omega) = -\chi_i(-\omega) \\ \chi_r(\omega) = \chi_r(-\omega)\end{cases} \Longleftrightarrow \chi(\omega)^* = \chi(-\omega)} \qquad (2)$$

でなければならない。

χ_r と χ_i の直観的イメージ： 時間領域で考える！

∴前頁(1) ➔

$$\boxed{\chi(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} [\chi_r(\omega)\cos\omega t + \chi_i(\omega)\sin\omega t]\, d\omega} \qquad (1)$$

上式から、

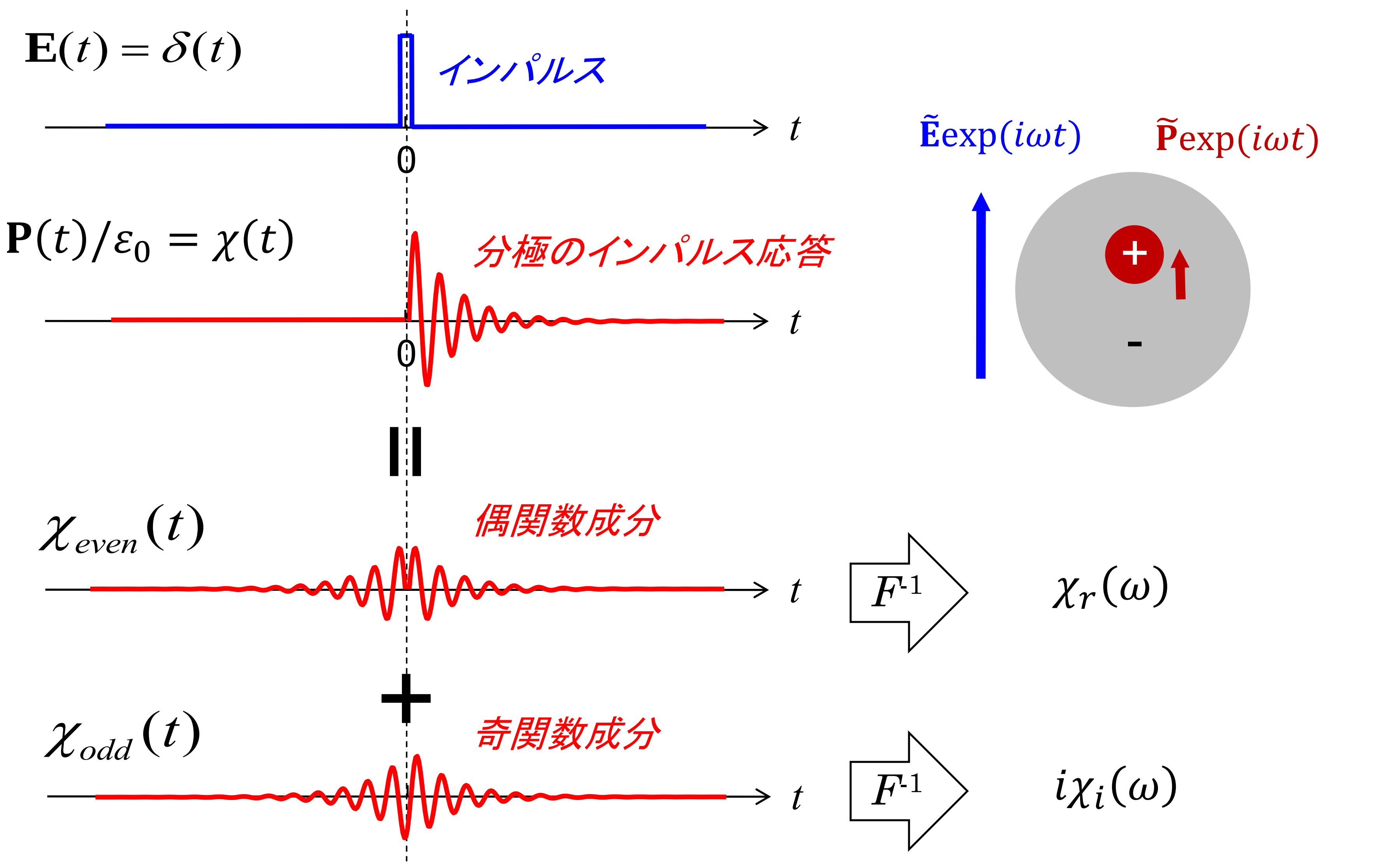
- $\chi_r(\omega)$: cos成分 = $\chi(t)$ のうち偶関数成分（時間に対して対称）
- $\chi_i(\omega)$: sin成分 = $\chi(t)$ のうち奇関数成分（時間に対して反転対称）

であることが分かる。つまり、

$$\left\{\begin{aligned} &\chi(t) \equiv \chi_{even}(t) + \chi_{odd}(t) \\ &\chi_{even}(t) \equiv \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \chi_r(\omega) e^{-i\omega t}\, d\omega \quad : \text{偶関数} \\ &\chi_{odd}(t) \equiv \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} [i\chi_i(\omega)] e^{-i\omega t}\, d\omega \quad : \text{奇関数} \end{aligned}\right. \qquad (2)$$

と書ける。

χ_r と χ_i の直観的イメージ



つまり

◆ クラマース･クローニッヒの関係式

$$\chi_r(\omega) = -\frac{1}{\pi}\mathrm{P.V.}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\chi_i(\omega')}{\omega-\omega'}d\omega'$$
$$\chi_i(\omega) = \frac{1}{\pi}\mathrm{P.V.}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\chi_r(\omega')}{\omega-\omega'}d\omega'$$

感受率χの実部χ_rと虚部 χ_i は、完全に独立ではなく、
相互に関係がある。

＝

$\chi(t)$ の偶関数成分と奇関数成分の間に、
相互関係がある。

では、これらの式の意味は？

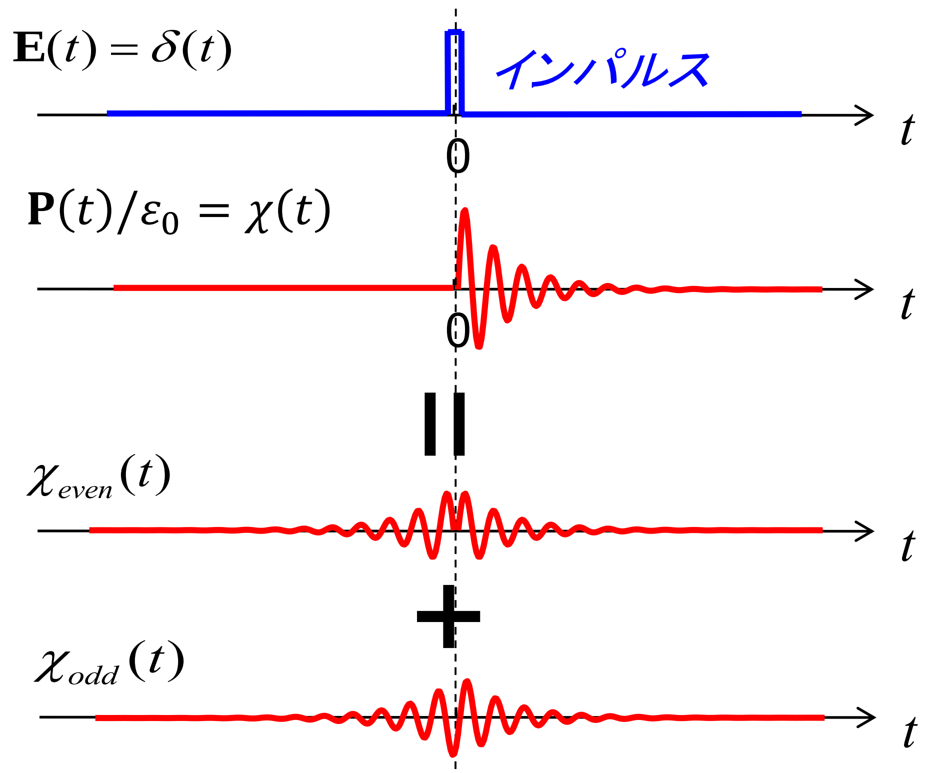
因果律

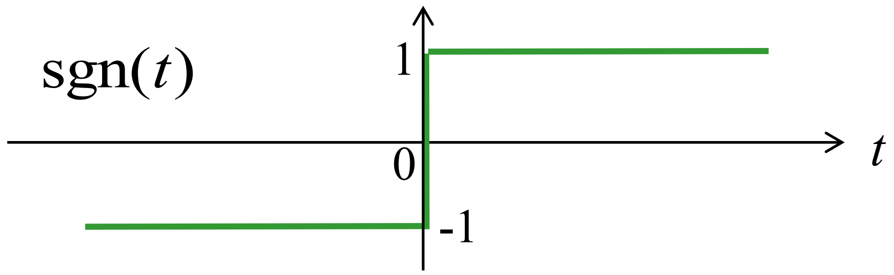
$t < 0$ において$\chi(t)$ = 0

光電界による外力がある前に
分極が発生することはない！

$$\begin{cases} \chi_{even}(t) = -\chi_{odd}(t) & \text{at } t < 0 \\ \chi_{even}(t) = \chi_{odd}(t) & \text{at } t > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \chi_{even}(t) = \chi_{odd}(t) \cdot \mathrm{sgn}(t) \\ \chi_{odd}(t) = \chi_{even}(t) \cdot \mathrm{sgn}(t) \end{cases}$$

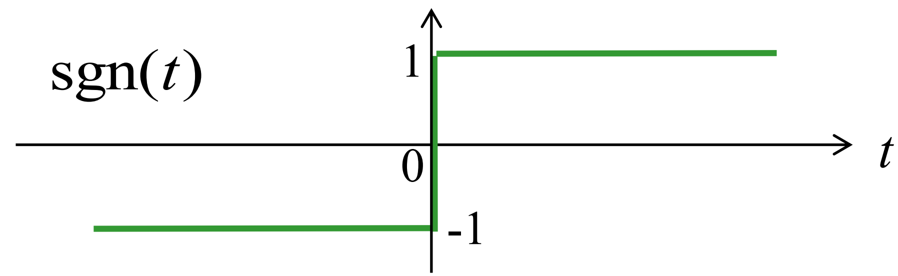




因果律

ここで、

$$\mathrm{sgn}(t) \overset{F^{-1}}{\Rightarrow} S(\omega) = \begin{cases} i\dfrac{2}{\omega} \ (\omega \neq 0) \\ 0 \ (\omega = 0) \end{cases} \quad (1)$$

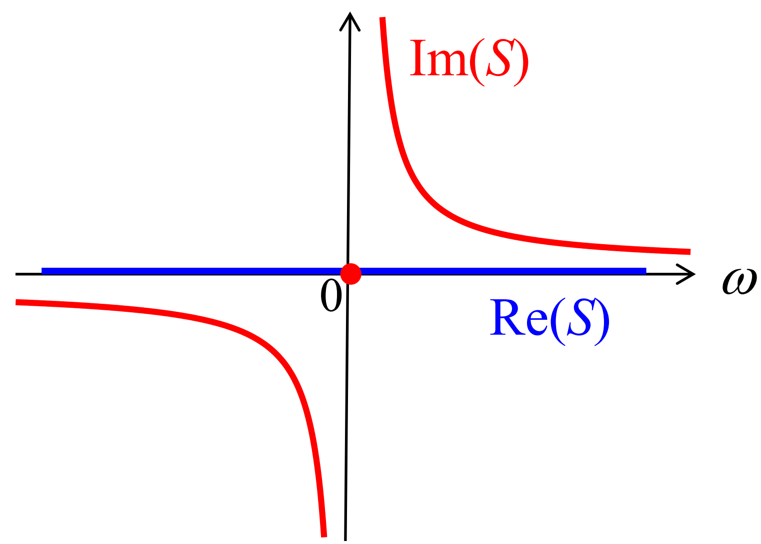


$$\begin{cases} \chi_{even}(t) = \chi_{odd}(t) \cdot \mathrm{sgn}(t) \\ \chi_{odd}(t) = \chi_{even}(t) \cdot \mathrm{sgn}(t) \end{cases} \quad (2)$$

F^{-1}

F^{-1} 畳み込み定理
(1)と#37(2)を上式(2)に代入

$$\chi_r(\omega) = -\frac{1}{\pi}\mathrm{P.V.}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\chi_i(\omega')}{\omega-\omega'}d\omega'$$
$$\chi_i(\omega) = \frac{1}{\pi}\mathrm{P.V.}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\chi_r(\omega')}{\omega-\omega'}d\omega' \quad (3)$$



※上式の変換を「ヒルベルト変換」とも呼ぶ。

クラマース・クローニッヒ関係式の帰結

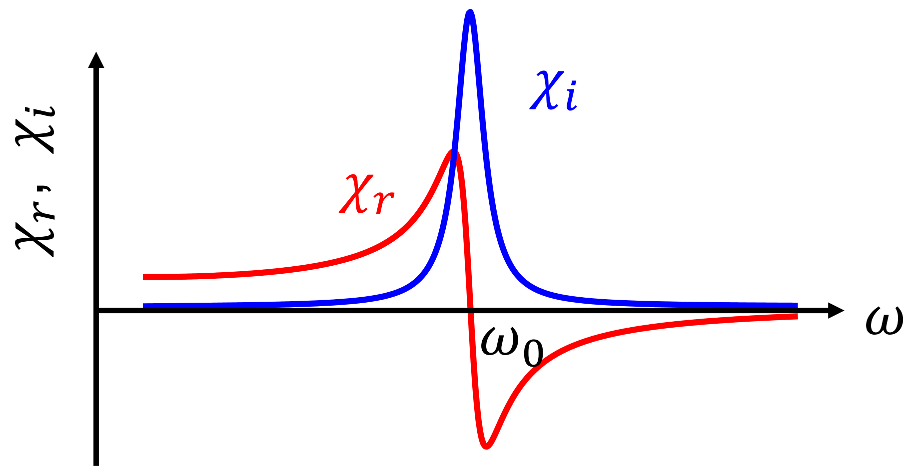
$$\chi_r(\omega) = -\frac{1}{\pi}\mathrm{P.V.}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\chi_i(\omega')}{\omega-\omega'}d\omega' \Longleftrightarrow \boxed{\chi_r(\omega) = \chi_i(\omega)\otimes\left(-\frac{1}{\pi\omega}\right)}$$

畳み込み

例えば、ある周波数 ω_0 で吸収ピークを持つ媒質

⇔ $\omega = \omega_0$で $\chi_i(\omega)$が鋭いピークを持つ。　（$\because \kappa = \chi_i/(2n)$ ）

必ず $\chi_r(\omega)$は、$\omega = \omega_0$の周りで右図のような周波数特性を示す。



つまり、
- $\omega < \omega_0$で屈折率は大きくなる。
- $\omega > \omega_0$で屈折率は小さくなる。
- その変化量は、$\chi_i(\omega_0)$の大きさ（吸収の強さ）で決まる。

（$\because n \approx \sqrt{1+\chi_r}$ ）

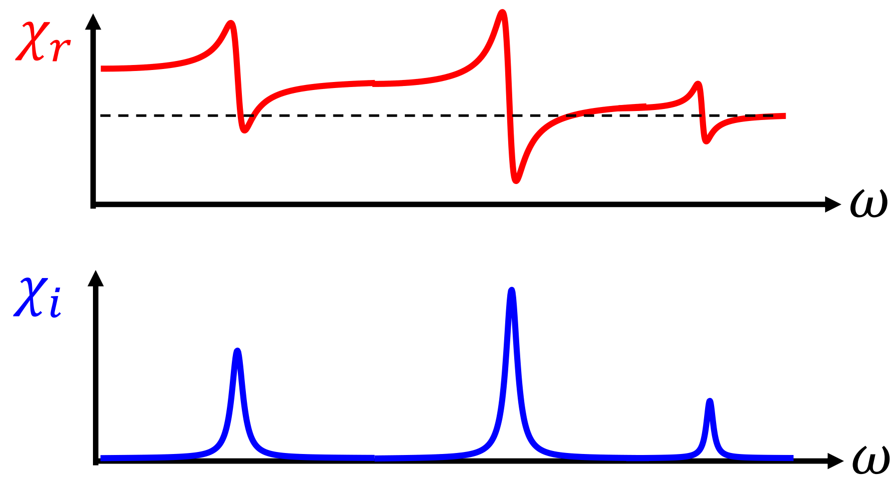
クラマース・クローニッヒ関係式の帰結

$$\chi_r(\omega) = -\frac{1}{\pi}\mathrm{P.V.}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\chi_{i(\omega')}}{\omega-\omega'}d\omega' \quad \Longleftrightarrow \quad \boxed{\chi_r(\omega) = \chi_i(\omega)\otimes\left(-\frac{1}{\pi\omega}\right)}$$

畳み込み

複数の周波数 $\omega_1, \ldots \omega_1$,で吸収ピークを持つ場合 (より現実的なケース)

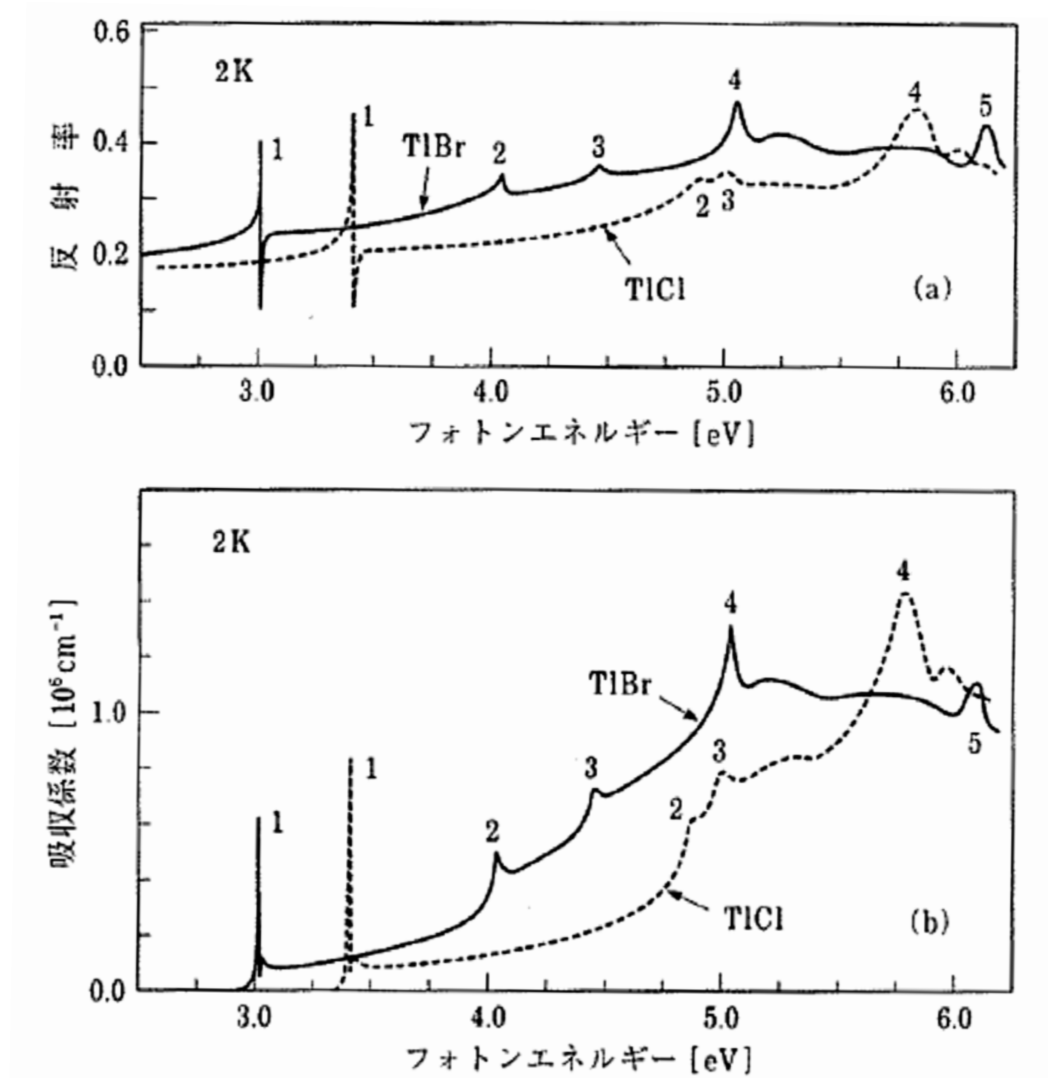
各吸収ピークの周辺で $\chi_r(\omega)$
(と屈折率)は、大きく変化する。



一般に、
「屈折率が大きい」
＝「光との相互作用の強い」
＝「吸収も大きい」

KKRを利用した測定法

材料の吸収率を直接測定することが難しいとき、例えば、反射率の測定結果から（近似的に）χ_r を計算し、クラマース・クローニッヒ関係式（KKR）を介して、χ_i を得ることができる。

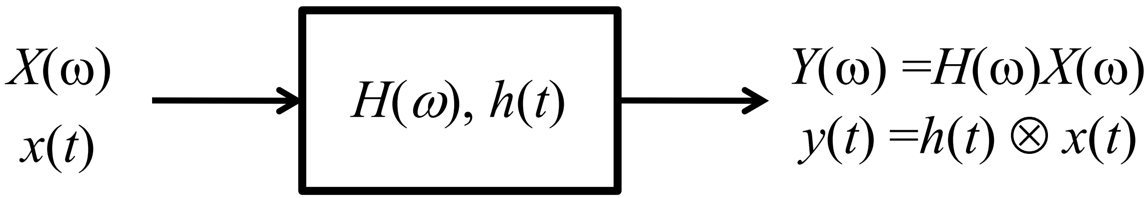


[右図]
イオン結晶TlClとTlBrの(a)2Kにおける反射スペクトルと、(b) KK変換により計算された吸収スペクトル

小林浩一,「光物性入門」, 裳華房, p. 29.

（補足）クラマース・クローニッヒ関係式の普遍性

KKRは、任意の線形システムにおいて成立する普遍的な法則のはず。



この系の伝達関数を $H(\omega)=H_r(\omega)+j\,H_i(\omega)$ として、インパルス応答 $h(t)$ が因果律を満たすとき、次式が成り立つ。

$$H_r(\omega) = -\frac{1}{\pi}\mathrm{P.V.}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{H_i(\omega')}{\omega-\omega'}d\omega'$$

$$H_i(\omega) = \frac{1}{\pi}\mathrm{P.V.}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{H_r(\omega')}{\omega-\omega'}d\omega'$$

例: ローパスフィルタやハイパスフィルタなどの“最小位相系”では、振幅特性（$\ln(H)$ の実部）と位相特性（$\ln(H)$ の虚部）に対しても同様の関係（ボーデ線図）が成り立つ。

種村, “光フィルタとクラマース・クローニッヒの関係,” 光学, 42(8), p. 427, (2013).

これまで(1, 2)のまとめ

- 光が媒質中を伝搬するとき、光電界により媒質中に光の周波数で高速に振動する分極が励起される。
- 分極の時間変化によって放射光が発生し、入射光と干渉することで、媒質中の波長は変化する。同時に反射光が発生する。
- 光電界に対する分極の応答は、複素感受率 χにより記述される。分極に位相遅れ／進みがある場合(χ に虚部がある場合)、光と媒質の間でエネルギーの授与が生じる。
- 光の伝搬は、複素誘電率ε、複素屈折率$\hat{n}$ により記述される。$\hat{n}$ に虚部がある場合、光は伝搬方向に対して減衰(または増大)する。

- 複素感受率$\chi(\omega)$は、一般に光の周波数ωの関数であるが、因果律より、実部と虚部の間に普遍的な関係(クラマース・クローニッヒの関係式)が成立する。
- その結果、一般に屈折率の大きな材料は、吸収も大きい。

アウトライン

I. はじめに

II. 光と物質の相互作用

- 物質の中の光
  1. 波動方程式，複素屈折率と減衰率
  2. 因果律とクラマース・クローニッヒの関係式
- **光に対する物質の応答**
  3. **金属の光学応答：ドルーデモデル**
  4. 金属以外の光学応答：ローレンツモデル
  5. 半古典的モデルによる物質の光学応答
  6. 半導体の光学応答

III. 光の量子論の基礎

7. 粒子性と波動性
8. 電磁界の量子化：光子数状態・コヒーレント状態
9. 昇降演算子
10. 自然放出

光と物質の相互作用

<u>E → P の影響</u>
物質を記述する方程式から求まる(感受率χ)
- 古典モデル(ドルーデモデル, ローレンツモデル)
- 半古典モデル(摂動理論)

光

電界 **E**
(磁界**B** はほとんど
寄与しない)

物質

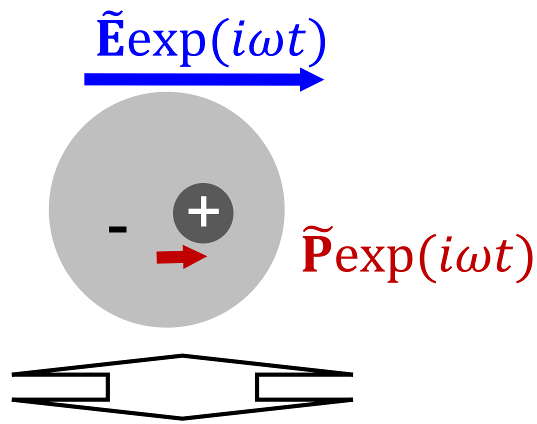
分極 **P**
(電流密度**J**)

<u>P → E の影響</u>
マクスウェル方程式から求まる(波動方程式)
→ 誘電率 ε、屈折率n、減衰率κ …

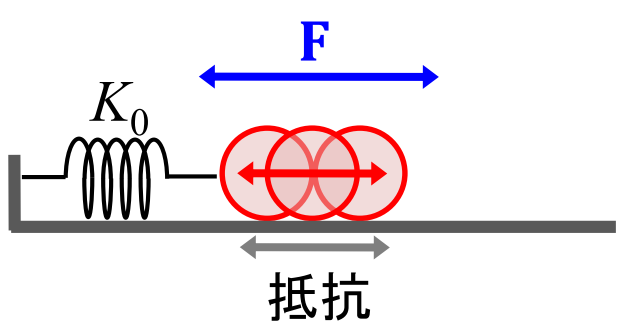
古典モデル:物質中の光学応答の担い手

誘電体（金属以外）

正電荷に束縛された**分極電子**

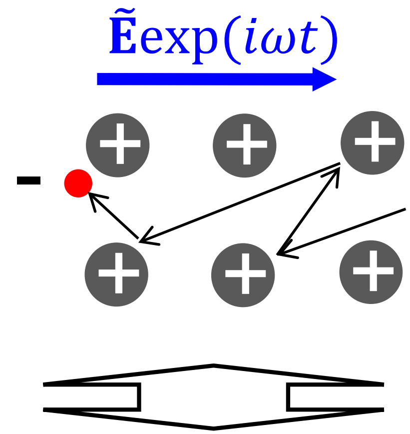


ローレンツモデル

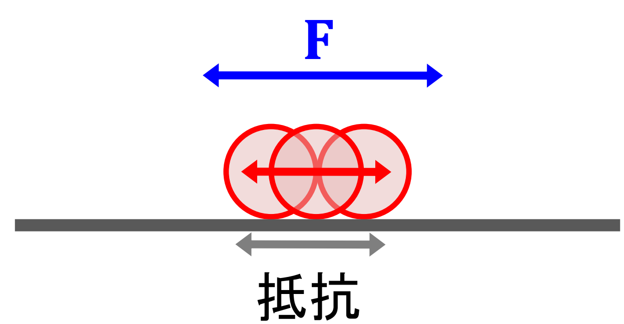


金属

束縛のない**自由電子**※



ドルーデモデル

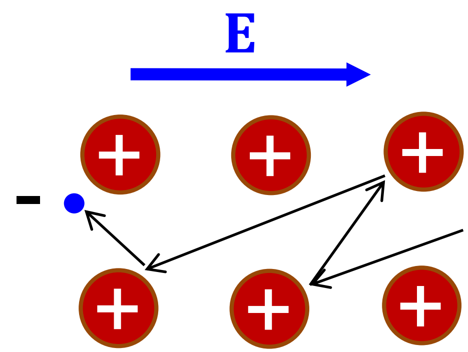


※前述したように、光の周波数においては、高速に振動する電流Jと分極の時間変化$\partial \mathbf{P}/\partial t$ に区別はない。

ドルーデモデル（Drude model）

<u>仮定</u>

- 電界によって加速した自由電子は、単位時間当たり $1/\tau$ の確率で散乱される。τ を緩和時間、平均自由時間などと呼ぶ。
- 緩和時間 τ は、<u>電子の位置や速度に無関係で一定と</u>する。
- 散乱直後、電子は、散乱前の速度とは無関係の（衝突の起こる場所の温度に応じた）速度でランダムな方向に出ていくとする。つまり、散乱直後の電子の平均速度は0である。



∴時刻 t から $t+\Delta t$ の間の電子の運動量 $p(t)$ の変化は、次式で表される。

$$p(t+\Delta t) = \underbrace{\left(1-\frac{\Delta t}{\tau}\right)}_{\text{散乱されない確率}} \left[p(t) + \underbrace{F\Delta t}_{\text{力積}}\right]$$

➔ $$p(t+\Delta t) - p(t) = -\frac{\Delta t}{\tau} p(t) + F\Delta t + O(\Delta t^2)$$

ドルーデモデル（Drude model）

$\Delta t \to 0$の極限において、

$$\frac{dp}{dt} = -\frac{1}{\tau}p(t) + F$$

$$\Rightarrow \quad m\left(\frac{d^2}{dt^2}\boldsymbol{x} + \frac{1}{\tau}\frac{d}{dt}\boldsymbol{x}\right) = -e\mathbf{E} \qquad (1)$$

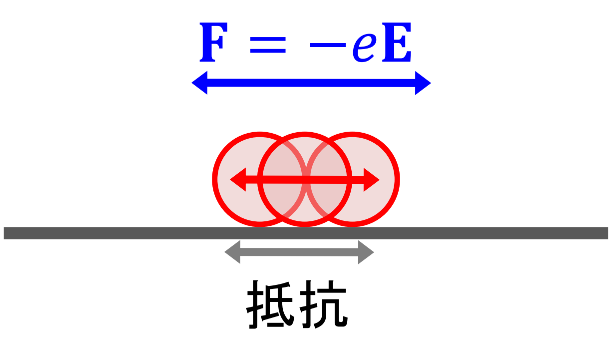
$\boldsymbol{x}$: 電子の位置, m: 電子の質量, $\mathbf{F} = -e\mathbf{E}$: 外力

∴抵抗のある物体のように、

$$m\left(\frac{d^2}{dt^2}\boldsymbol{x} + 2\gamma\frac{d}{dt}\boldsymbol{x}\right) = -e\mathbf{E} \qquad (2)$$

（ただし、抵抗係数 $2\gamma \equiv 1/\tau$）

と表される。



ドルーデモデルの解

分極ベクトル　$\mathbf{P} = N_0\boldsymbol{\mu} = -eN_0\boldsymbol{x}$　　(1)

なので、前頁(2) より、

$$\left(\frac{d^2}{dt^2} + 2\gamma\frac{d}{dt}\right)\mathbf{P} = \frac{N_0e^2}{m}\mathbf{E} \qquad (2)$$

単色光への応答（周波数特性）を求める。

$$\begin{cases} \mathbf{E}(\mathbf{r},t) \equiv \tilde{\mathbf{E}}(\omega)\exp(-i\omega t) & (3) \\ \mathbf{P}(\mathbf{r},t) \equiv \tilde{\mathbf{P}}(\omega)\exp(-i\omega t) & (4) \end{cases}$$

を(2)に代入すると、（⇔ つまり、(2)をフーリエ変換すると）

$$\tilde{\mathbf{P}}(\omega) = -\frac{N_0e^2}{m(\omega^2 + i\omega/\tau)}\tilde{\mathbf{E}}(\omega) \qquad (5)$$

ドルーデモデルの解

$\widetilde{\mathbf{P}}(\omega) = \varepsilon_0 \chi(\omega) \tilde{\mathbf{E}}(\omega)$ なので、

感受率 $\chi(\omega) = -\dfrac{\omega_p^2}{\omega^2 + i\omega/\tau}$ (1)

誘電率 $\varepsilon(\omega) = 1 - \dfrac{\omega_p^2}{\omega^2 + i\omega/\tau}$ (2)

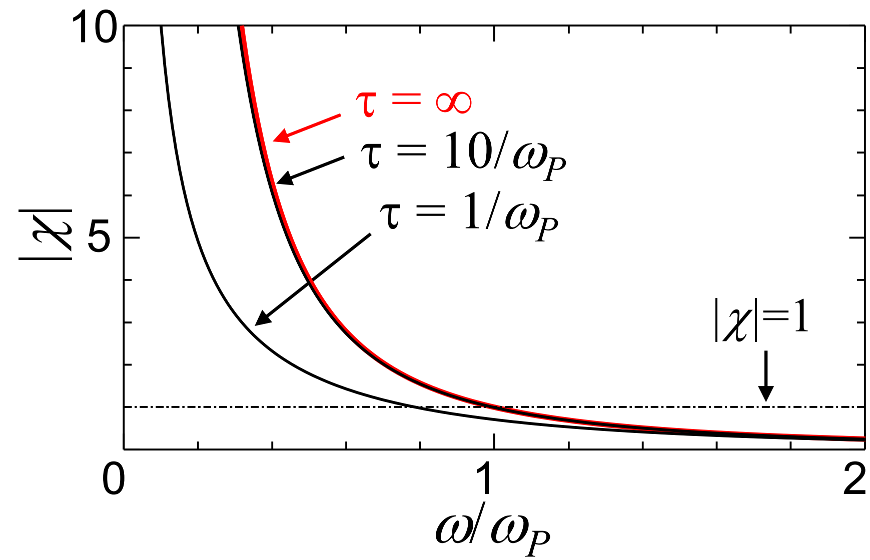
ただし、

プラズマ周波数 $\omega_p \equiv \sqrt{\dfrac{N_0 e^2}{m\varepsilon_0}}$ (1)

金属中の分極の応答

$$\tilde{\mathbf{P}}(\omega) = \varepsilon_0 \chi(\omega) \tilde{\mathbf{E}}(\omega) \qquad (1)$$

$$\chi(\omega) = -\frac{1}{\left(\frac{\omega}{\omega_p}\right)^2 + \frac{i}{\tau\omega_p} \cdot \frac{\omega}{\omega_p}} \qquad (2)$$



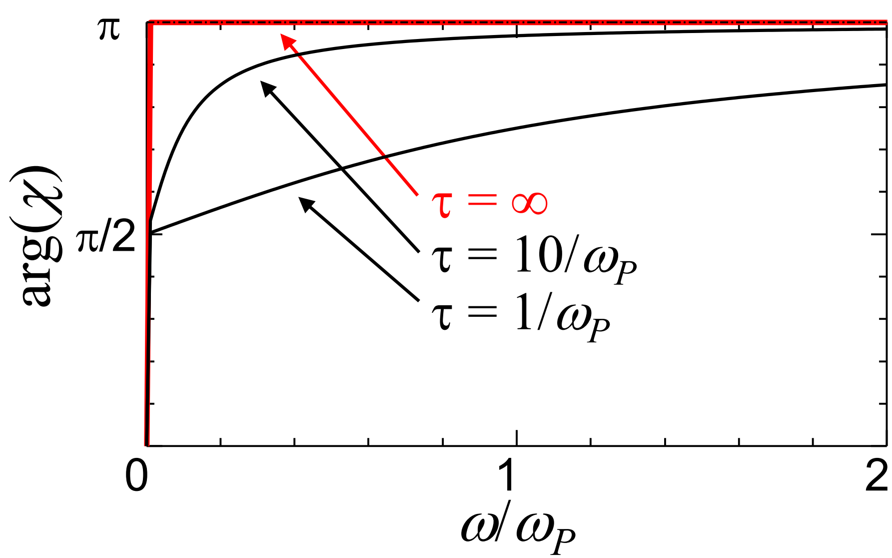
(1) $\tau >> 1/\omega_P$（衝突が少ない）もしくは $\omega > \omega_P$ の領域では、arg(χ)=π. つまり、電界に対して分極は逆相。

∵ 力∝ $\boxed{}$ の領域

応答の大きさ|χ|は、周波数が高くなるにつれて小さくなる。

(2) τ が小さく（衝突が大きい）、$\omega \ll \omega_P$ では、arg(χ)=π/2. つまり、電界に対して分極が90度遅れる。

∵ 力∝ $\boxed{}$ の領域



理想的(τ = ∞)な金属の屈折率

τ = ∞ (衝突がない) とき

$$\chi(\omega) = -\frac{\omega_p^2}{\omega^2} \qquad \varepsilon(\omega) = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}$$

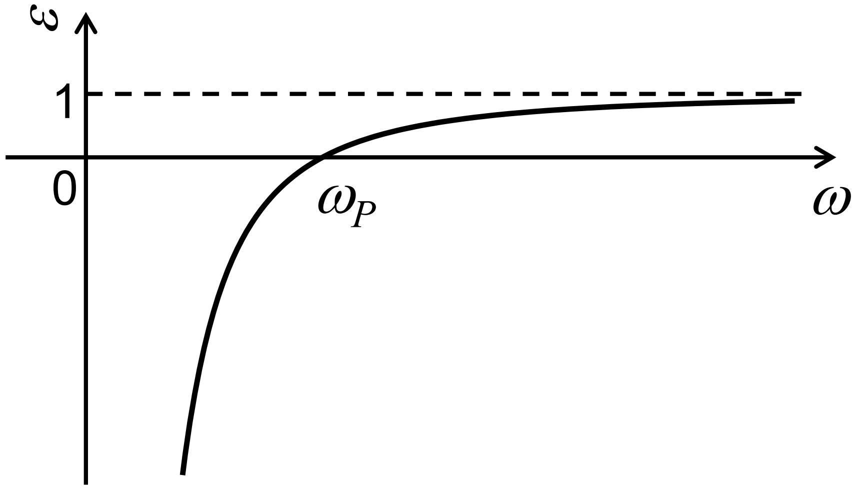
複素屈折率

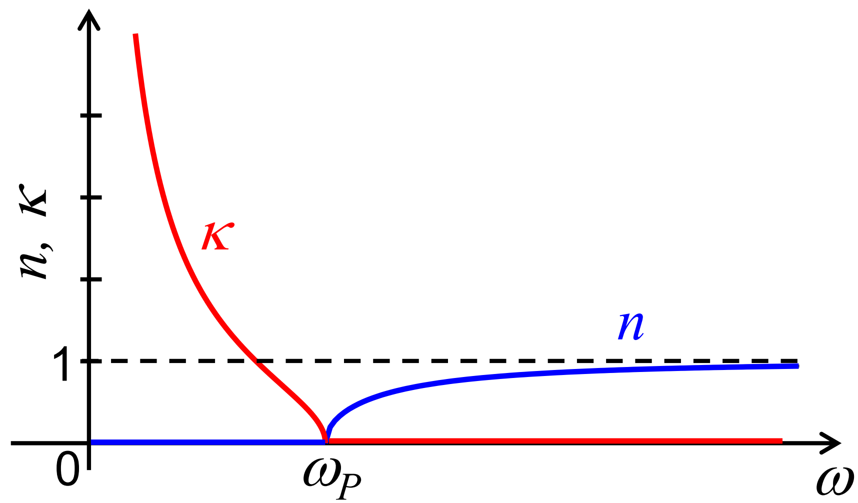
$$\hat{n}(\omega) = n + i\kappa = \sqrt{\varepsilon} = \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}$$

なので、

$$\text{(i) } \omega < \omega_P\text{:}\ \ n = 0, \kappa = \sqrt{\frac{\omega_p^2}{\omega^2} - 1}$$

$$\text{(ii) } \omega \geq \omega_P\text{:}\ \ n = \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}, \kappa = 0$$

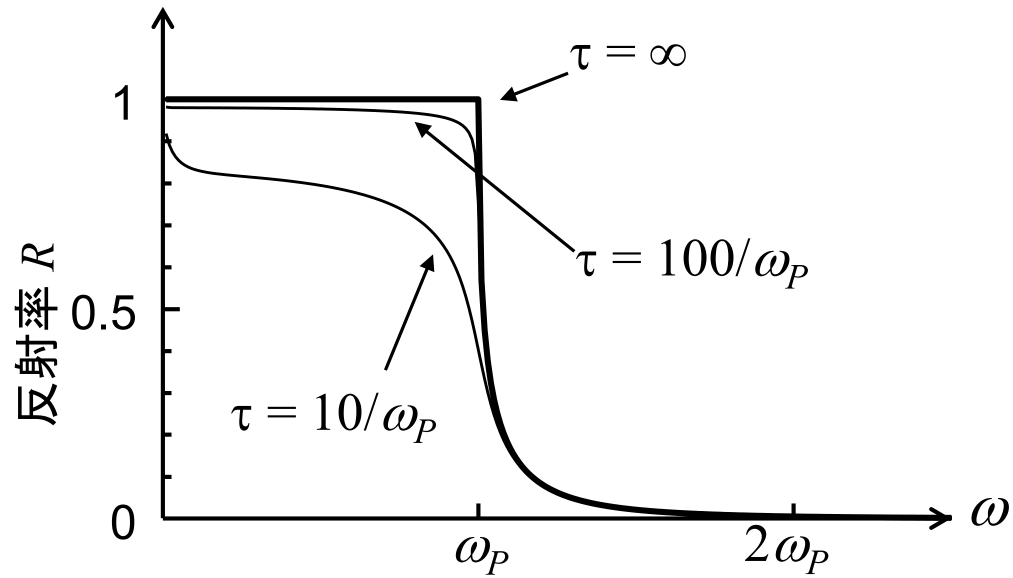




金属の反射率

◆垂直入射時の反射率

$$R = \left|\frac{1-\hat{n}}{1+\hat{n}}\right|^2 = \frac{(1-n)^2+\kappa^2}{(1+n)^2+\kappa^2} \qquad (1)$$

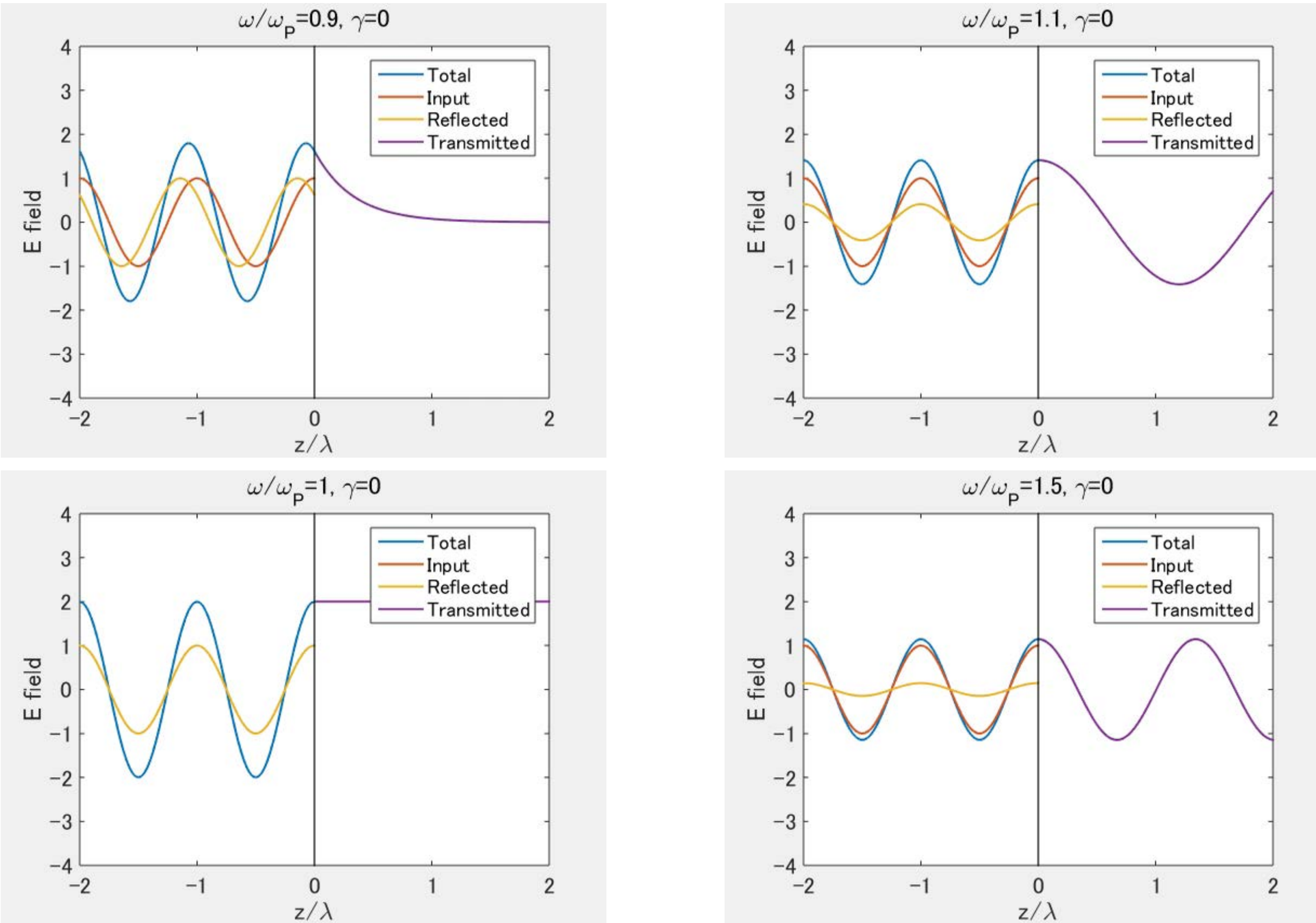


金属にとって、プラズマ周波数は、ある種の“臨界”周波数を表す。

(1) $\omega < \omega_P$ では、金属の屈折率は虚部κを持ち、金属内で光は減衰する。このとき、入射光の大部分（$\tau = \infty$ のときは全部）が反射される。

(2) $\omega >> \omega_P$ では、金属の屈折率は実数になり、（$\tau = \infty$ のときは全部）透明になる。$\tau < \infty$ のときは、（$\mathrm{Im}(\chi)>0$ なので）一部の光が吸収される。

金属の反射率


ω/ωP=0.9, γ=0
ω/ωP=1.1, γ=0
ω/ωP=1, γ=0
ω/ωP=1.5, γ=0
Total
Input
Reflected
Transmitted
E field
z/λ

プラズマ周波数の例

一般的な金属の場合、
電子密度　$N_0 = 10^{22}$~10^{23} cm^{-3}

- 電子の質量　$m = 9.11 \times 10^{-31}$ kg
- 真空の誘電率 $\varepsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12}$m^{-3} kg^{-1} s^4 A^2
- 電荷素量 $e = 1.60 \times 10^{-19}$ s A

金属	λ_P (nm)
金	550
銀	350
アルミ	80

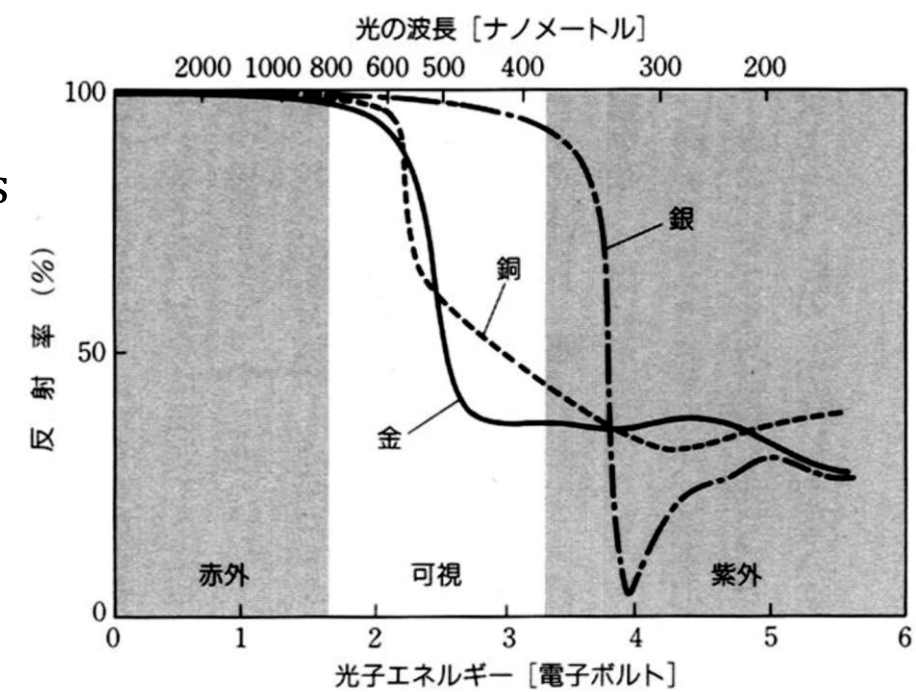
を代入して、

$$\omega_p \equiv \sqrt{\frac{N_0 e^2}{m\varepsilon_0}} \approx 10^{15} \sim 10^{16}\ \mathrm{rad/s}$$

プラズマ波長

$$\lambda_p = \frac{2\pi c}{\omega_p} \approx \text{数}100\ \mathrm{nm}$$

（可視～紫外）

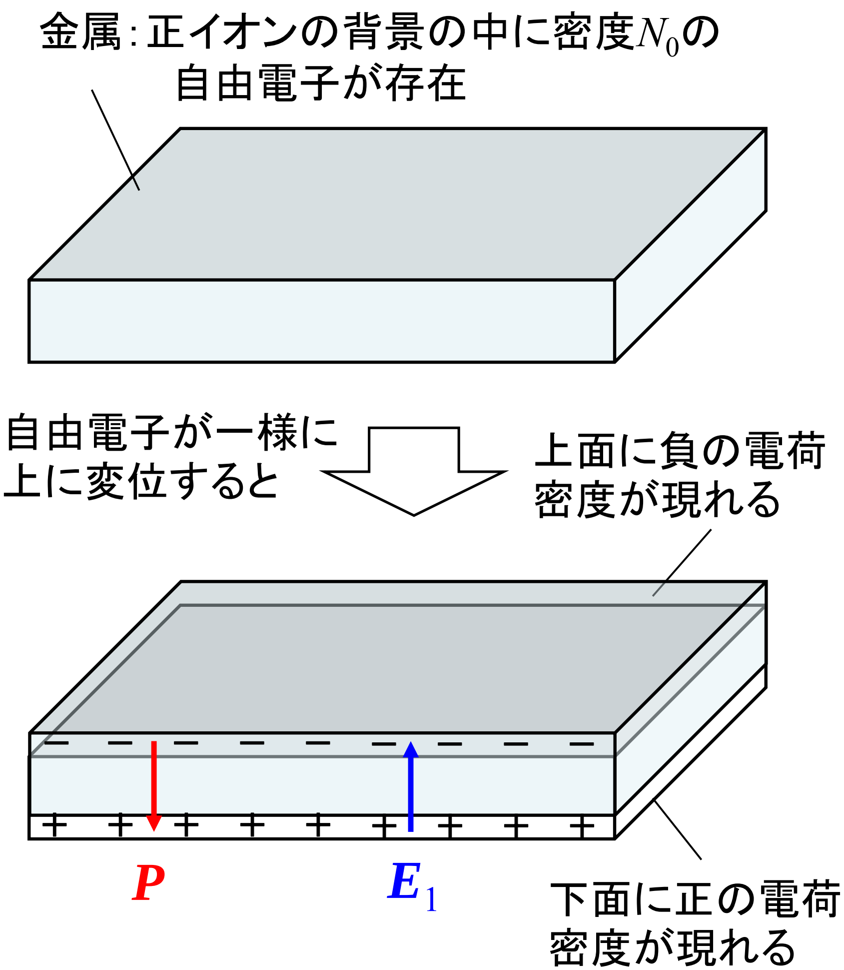


佐藤勝昭「金色の石に魅せられて」裳華房（1990）.

問い: 金と銀の色の違いはどこからくる？

プラズマ周波数の意味(1/2)

$\varepsilon = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}$ より、$\omega = \omega_P$において$\varepsilon = 0$となる。どういうことか？



【答え】
ω_Pは、金属中の自由電子の集団振動の固有周波数を表す。

① 金属中の自由電子が一様に u 変位すると、上下面に面密度 $\pm eN_0 u$ の電荷が発生。

② この表面電荷により、金属内部に電界 $E_1 = \frac{N_0 e}{\varepsilon_0} u$ が発生。

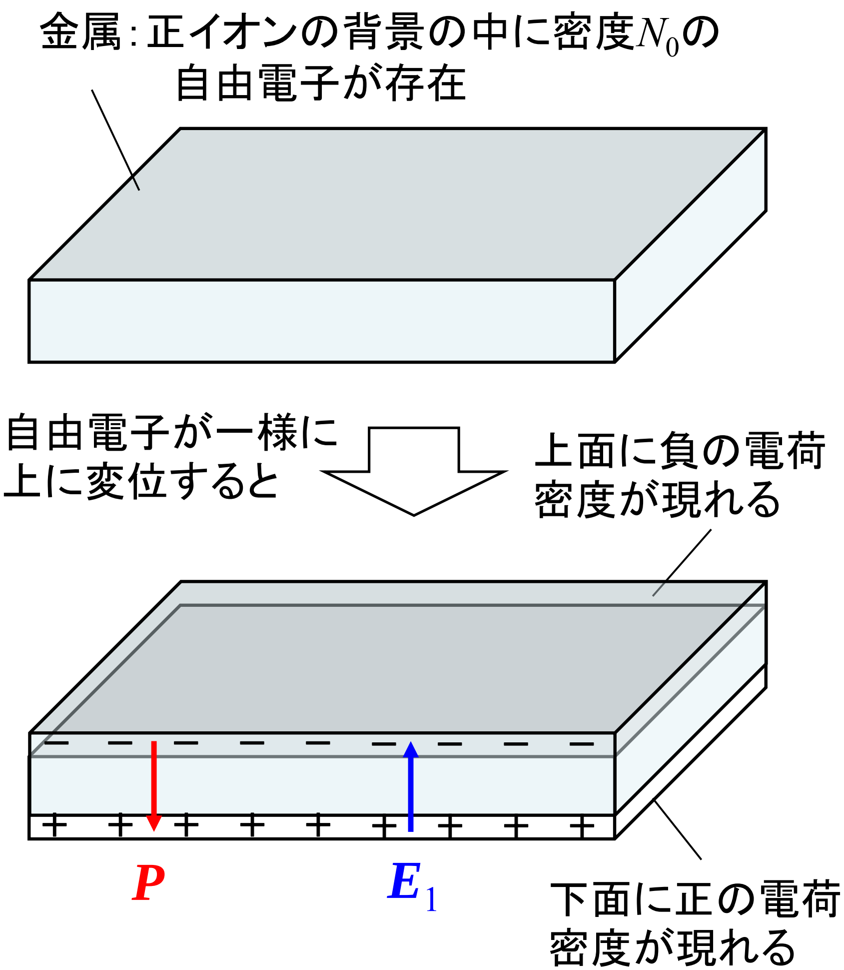
③ ∴電子に対する運動方程式は、

$$m\frac{d^2}{dt^2}u = -eE_1 = -\frac{N_0 e^2}{\varepsilon_0} u$$

➔ 固有周波数 $\omega_P = \sqrt{\frac{N_0 e^2}{\varepsilon_0 m}}$ の調和振動

プラズマ周波数の意味(2/2)

$\varepsilon = 1 - \dfrac{\omega_p^2}{\omega^2}$ より、$\omega = \omega_P$において$\varepsilon = 0$となる。どういうことか？



【答え】
ω_Pは、金属中の自由電子の集団振動の固有周波数を表す。

- 金属中では、個々の自由電子は束縛されていないが、集団としての運動には固有振動数(プラズマ周波数)が存在する。
- 集団としての運動なので、その振動数は、質量m、電荷eに加えて、密度N_0に依存する。
- 電子全体が“一様に”振動するため、横波として波数を持って伝搬しない (#57参照)
  ➔ $k = 0$ $(n = 0)$

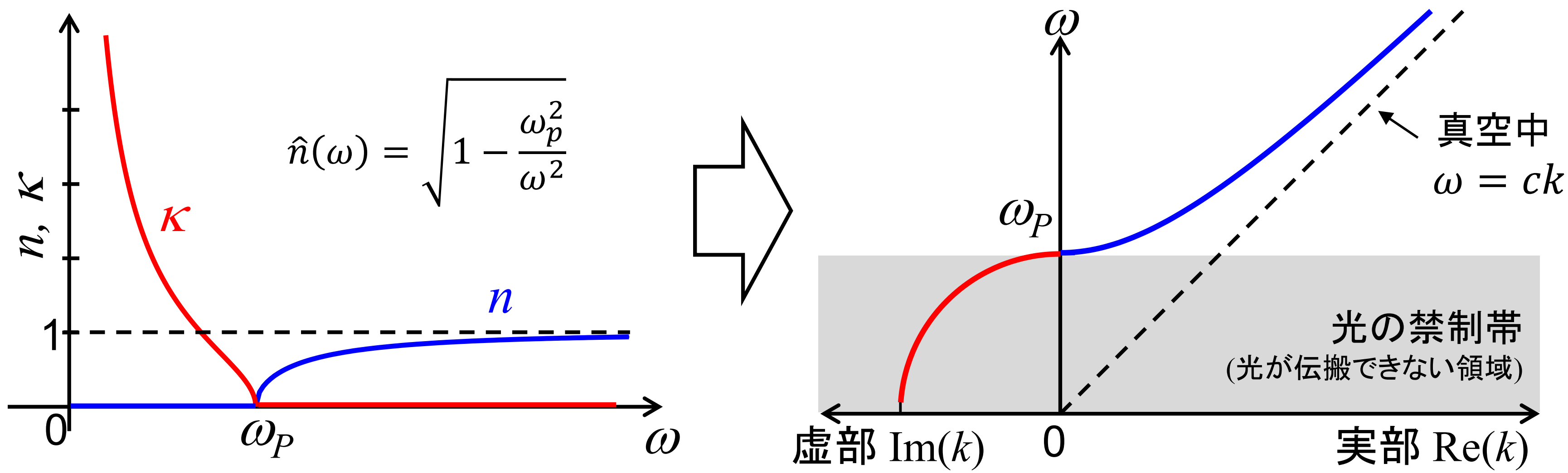
理想的な金属の分散曲線

◆分散曲線

- 媒質中で許される光※の「波数 k に対する周波数ω」の関係をプロットしたもの
- n–ω グラフと情報は変わらないが、光以外の振動子との結合を理解する上で便利
  （例えば、電子の波動関数には屈折率の概念はないが、分散曲線は定義される）

◆理想的な金属（τ = ∞）の場合

$$\hat{n}(\omega) = \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}, \quad \omega = \frac{c}{\hat{n}} k \text{ より、} \omega = \sqrt{(ck)^2 + \omega_P^2}$$



※分散曲線は、光以外にも、電磁波一般、格子振動（フォノン）、音波、電子の波動関数など、波の性質を持つものに対して一般的に定義され、媒質中の波の振舞いを表すために良く用いられる。固体物理学で出てくるバンド曲線は、半導体中の電子の波動関数に対する分散曲線である。

屈折率 n<1とはどういう意味か？

金属は、$\omega > \omega_P$ において、n<1になる。

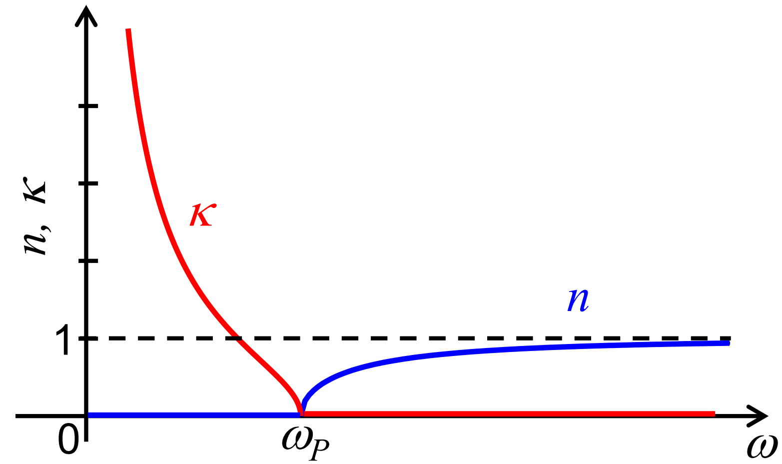
分散曲線からも明らかなように、
位相速度※$v_p (\equiv \omega/k)$が、$v_p = \frac{c}{n} > c$
となる。
➔ 光エネルギーが真空中の光速以上で伝わるということか！？

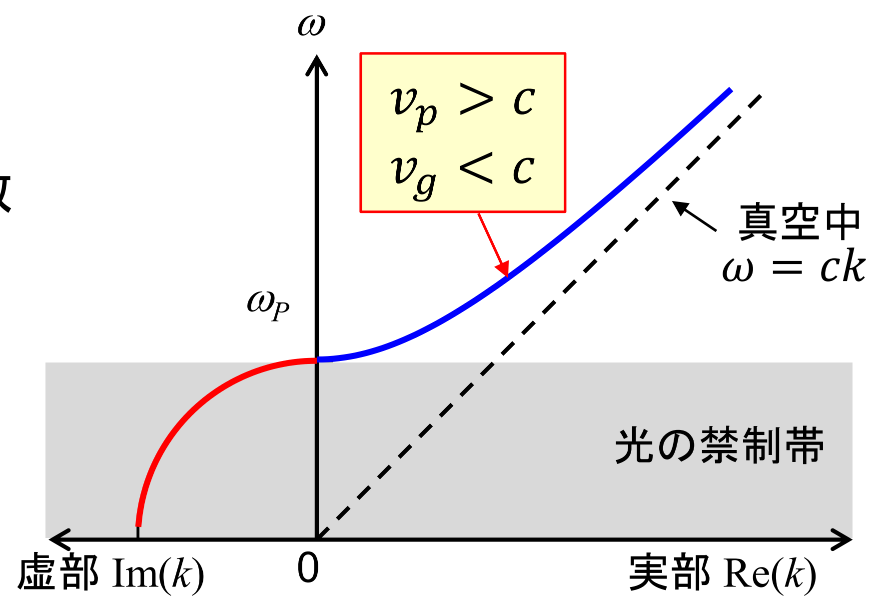
NO！

光エネルギーの伝搬速度は、1つの周波数のみに対する屈折率で決まるのではなく、複数の周波数における屈折率が関係する

最も単純には**群速度**※$v_g \left(\equiv \frac{\partial \omega}{\partial k}\right)$で決まる
$v_g < c$なので、光速以下で伝搬する

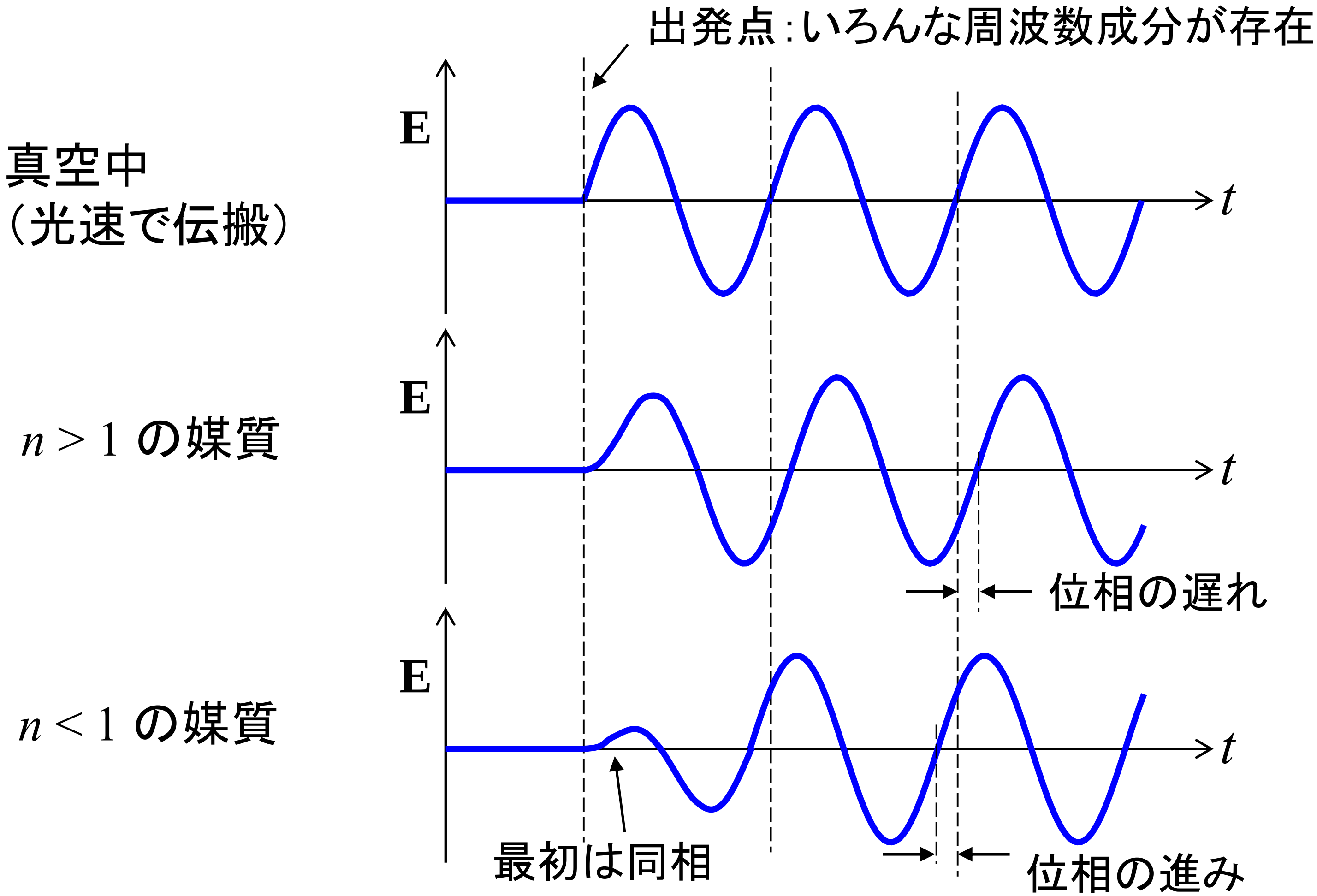
※小関先生の講義資料参照のこと.





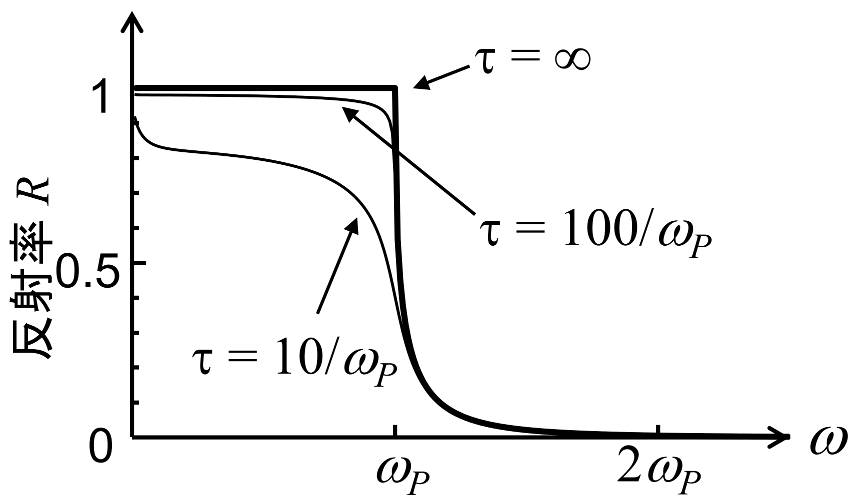
屈折率 n<1とはどういう意味か？

- 屈折率nは、定常状態での位相の遅れ／進みを表しているだけ。
- “出発点”の伝搬速度は、真空中の光速を超えることはできない。

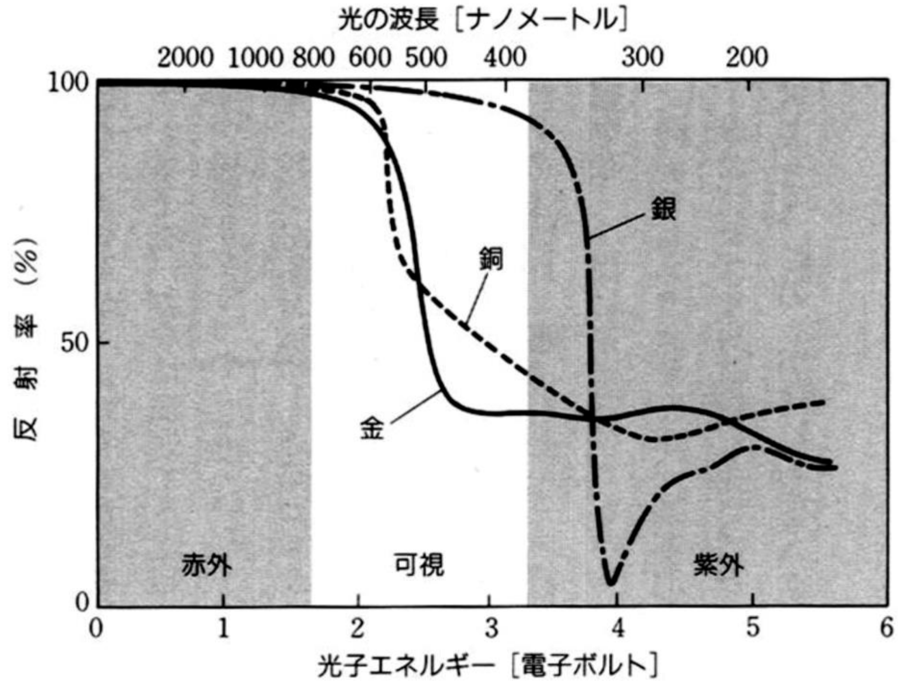


実際の金属とドルーデモデルとの差

ドルーデモデル



実際



佐藤勝昭「金色の石に魅せられて」裳華房(1990).

- 実際の金属は、ドルーデモデルよりも複雑な周波数特性を示す。
- ドルーデモデルでは、$\omega \rightarrow \infty$ で 屈折率は1に漸近するはずだが、実際は異なる。

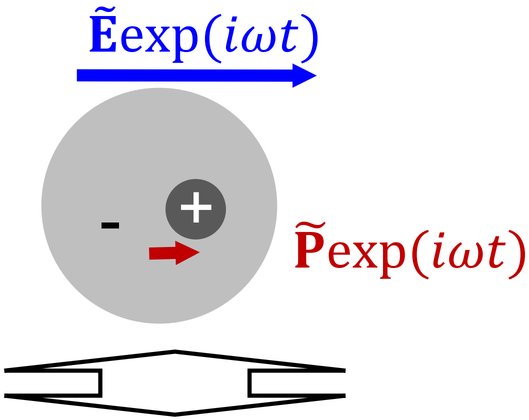
∵金属中には、自由電子以外にも<u>原子に束縛された電子も存在し、寄与する</u>から。
➔ローレンツモデルを合わせて考える必要がある。

アウトライン

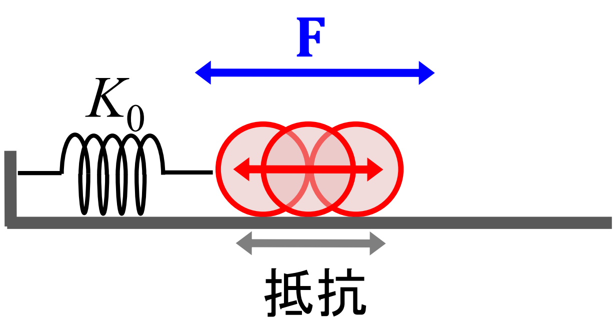
物質中の光学応答の担い手

誘電体(金属以外)

正電荷に束縛された分極電子

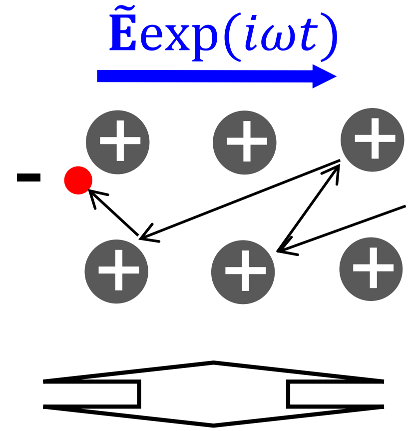


ローレンツモデル

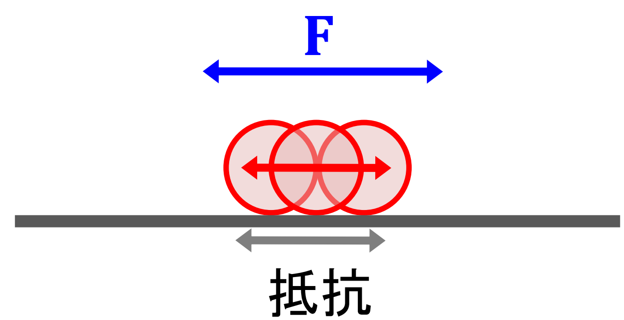


金属

束縛のない自由電子※



ドルーデモデル

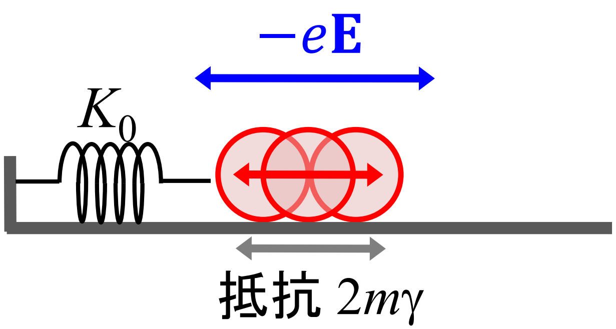


※前述したように、光の周波数においては、高速に振動する電流**J**と分極の時間変化∂**P**/∂t に区別はない。

ローレンツモデル（Lorentz model）

分極電子（束縛電子）に対する運動方程式は、

$$m\left(\frac{d^2}{dt^2}\boldsymbol{x} + 2\gamma\frac{d}{dt}\boldsymbol{x}\right) = -\underline{\underline{K_0\boldsymbol{x}}} - e\mathbf{E} \qquad (1)$$



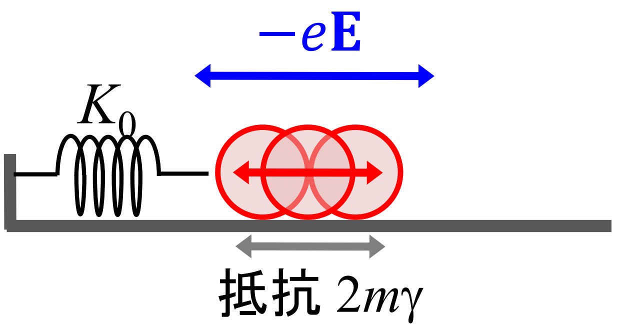
とモデル化できる。（強制振動）

$$m\left(\frac{d^2}{dt^2}\boldsymbol{x} + 2\gamma\frac{d}{dt}\boldsymbol{x} + \underline{\underline{\omega_0^2\boldsymbol{x}}}\right) = -e\mathbf{E} \qquad (2)$$

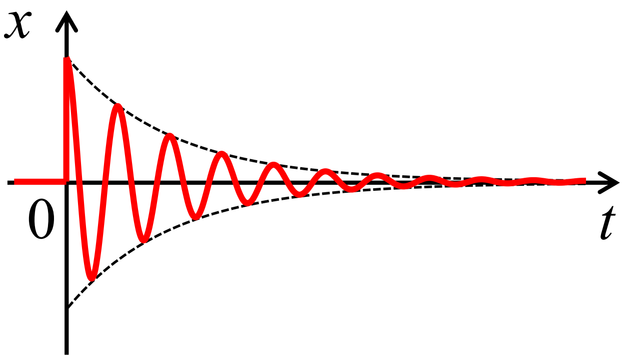
ただし、ω_0はバネの固有振動数 $\omega_0 \equiv \sqrt{\frac{K_0}{m}}$ (3)

減衰振動運動

$$m\left(\frac{d^2}{dt^2}\boldsymbol{x} + 2\gamma\frac{d}{dt}\boldsymbol{x} + \omega_0^2\boldsymbol{x}\right) = -e\mathbf{E} \qquad (1)$$



外力がないとき($\mathbf{E} = 0$)、
初期振幅を$\boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{x}_0$ として、



$$\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{x}_0 e^{-\gamma t}\cos\Omega t \qquad (2)$$

ここでΩは、減衰がある場合の固有振動数であり、

$$\Omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} \qquad (3)$$

と表される。

ローレンツモデルの解

分極ベクトル $\mathbf{P} = -eN_0\boldsymbol{x}$ の方程式は、

$$\left(\frac{d^2}{dt^2} + 2\gamma\frac{d}{dt} + \omega_0^{\mathbf{2}}\right)\mathbf{P} = \frac{N_0e^2}{m}\mathbf{E} \qquad (1)$$

単色光

$$\begin{cases} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \equiv \tilde{\mathbf{E}}\exp(-i\omega t) & (2) \\ \mathbf{P}(\mathbf{r}, t) \equiv \widetilde{\mathbf{P}}\exp(-i\omega t) & (3) \end{cases}$$

を(1)に代入して、

$$\widetilde{\mathbf{P}} = -\frac{N_0e^2}{m(\omega^2 - \omega_0^2 + 2i\omega\gamma)}\tilde{\mathbf{E}} \qquad (4)$$

ローレンツモデルの解

∴

感受率 $$\chi = -\frac{\omega_p^2}{\omega^2 - \underline{\underline{\omega_0^2}} + i2\gamma\omega} \qquad (1)$$

誘電率 $$\varepsilon = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 - \underline{\underline{\omega_0^2}} + i2\gamma\omega} \qquad (2)$$

ただし、

プラズマ周波数 $$\omega_p \equiv \sqrt{\frac{N_0 e^2}{m\varepsilon_0}} \qquad (3)$$

ドルーデモデル（#52）は、ローレンツモデルにおいて$\omega_0 = 0$ (バネがない）とした場合に相当する、と考えることができる。

分極の応答(ローレンツモデル)

$$\chi = -\frac{\omega_p^2}{\omega^2 - \omega_0^2 + i2\gamma\omega}$$

(1) $\omega \ll \omega_0$ では、arg(χ)=0. つまり、<u>電界に対して分極は同相</u>。

∵ 外力=バネの復元力∝位置の領域

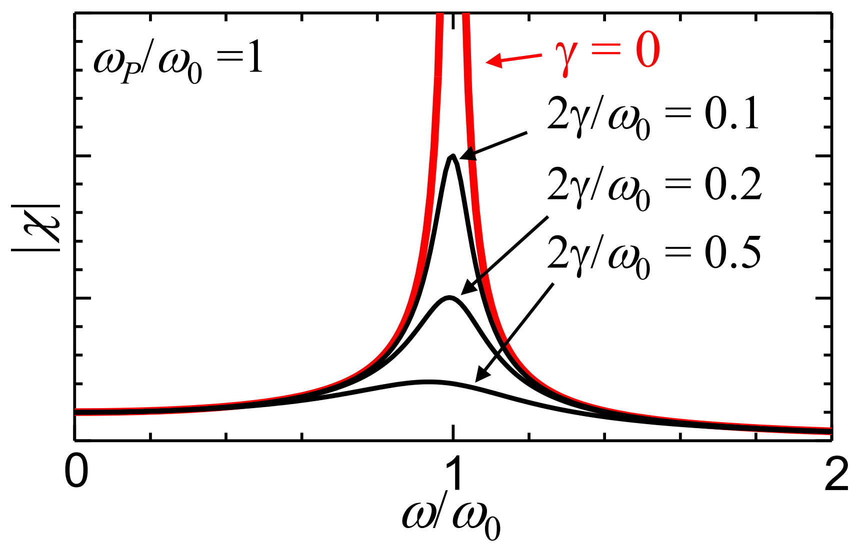
(2) $\omega \gg \omega_0$ では、arg(χ)=π. つまり、<u>電界に対して分極は逆相</u>。

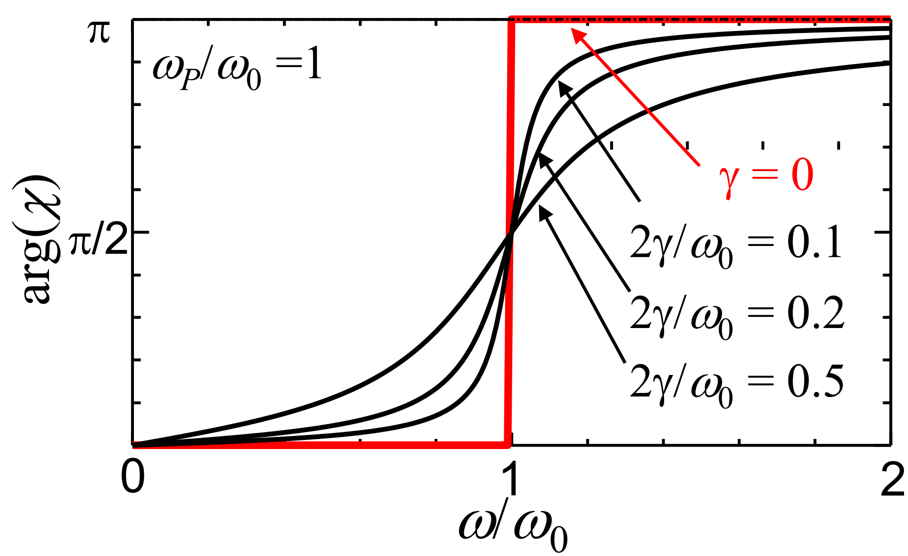
∵ 外力=加速度の領域

(3) $\omega = \omega_0$ では、arg(χ)=π/2. つまり、<u>電界に対して分極は90度遅れる。</u>

∵ 外力=抵抗∝速度 の領域

- 調和振動子の強制振動と同じ振舞い
- (2), (3)において$\omega_0 = 0$とすれば、金属(ドルーデ)と同じ

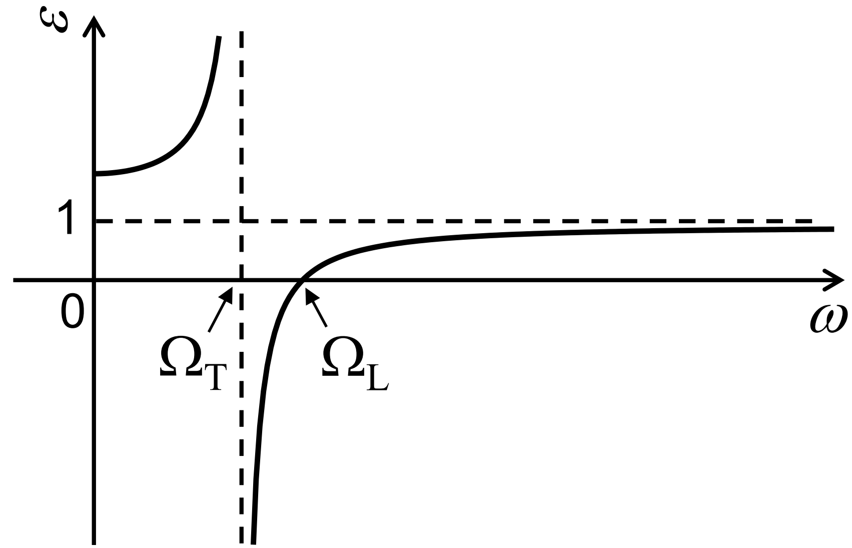




抵抗がない($\gamma = 0$, 損失なし)場合

$\gamma = 0$ (抵抗がない=損失がない) のとき

$$\chi(\omega) = -\frac{\omega_p^2}{\omega^2 - \omega_0^2}$$ なので



$$\varepsilon(\omega) = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 - \omega_0^2} \equiv \frac{\omega^2 - \Omega_{\mathrm{L}}^2}{\omega^2 - \Omega_{\mathrm{T}}^2} \qquad (1)$$

ただし、

・横波周波数 $\Omega_{\mathrm{T}} \equiv \omega_0$ (2)

・縦波周波数 $\Omega_{\mathrm{L}} \equiv \sqrt{\omega_P^2 + \omega_0^2}$ (3)

相互作用の強さを表す指標として、縦横分裂エネルギー $\Delta_{\mathrm{LT}} \equiv \Omega_{\mathrm{L}} - \Omega_{\mathrm{T}}$ が用いられる。

抵抗がない($\gamma = 0$, 損失なし)場合

◆複素屈折率

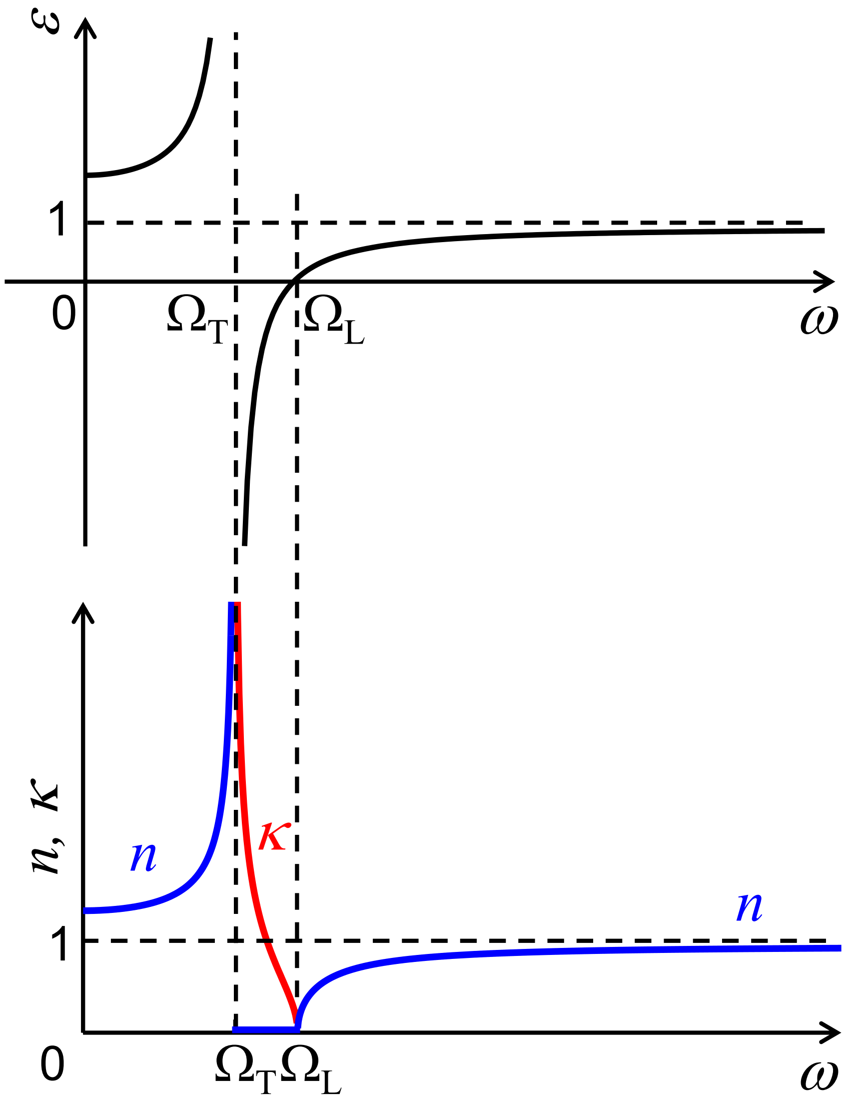
$$\hat{n}(\omega) = \sqrt{\varepsilon} = \sqrt{\frac{\omega^2 - \Omega_\mathrm{L}^2}{\omega^2 - \Omega_\mathrm{T}^2}}$$

(i) $\omega < \Omega_\mathrm{T}, \omega \geq \Omega_\mathrm{L}$:

$$n = \sqrt{\frac{\omega^2 - \Omega_\mathrm{L}^2}{\omega^2 - \Omega_\mathrm{T}^2}}, \kappa = 0$$

(ii) $\Omega_\mathrm{T} \leq \omega < \Omega_\mathrm{L}$:

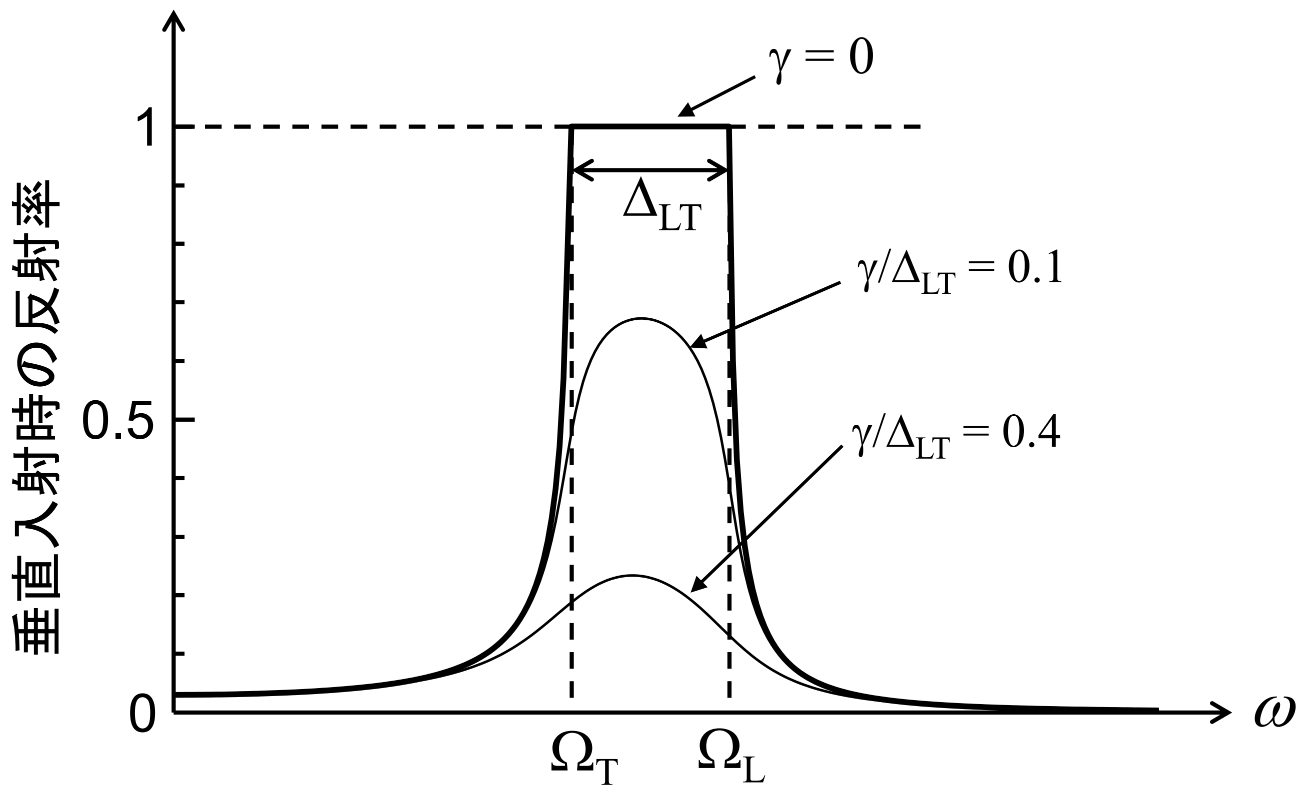
$$n = 0, \kappa = \sqrt{\frac{\Omega_\mathrm{L}^2 - \omega^2}{\omega^2 - \Omega_\mathrm{T}^2}}$$



$\Omega_\mathrm{T} = \omega_0 = 0$ のとき、金属(ドルーデ)の場合(#55)に一致

反射率(ローレンツモデル)

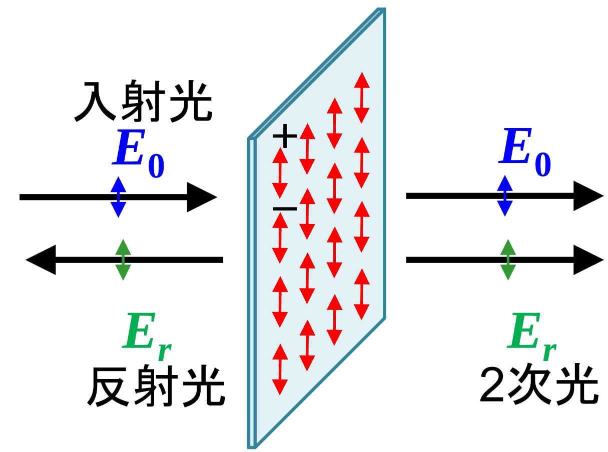
- γ=0(損失なし)のとき、$\Omega_T < \omega < \Omega_L$ の周波数(波長)範囲で全反射される。
- この範囲は、"光の禁制帯"と呼ばれ、Δ_{LT}は、その周波数幅(帯域)を表す。
- 現実には、$\gamma > 0$なので(格子振動による散乱、他の電子との衝突など)、100%反射されることはあり得ない。しかし、この範囲で反射率が大きくなることに変わりない。



Ω_T と Ω_L の物理的な意味

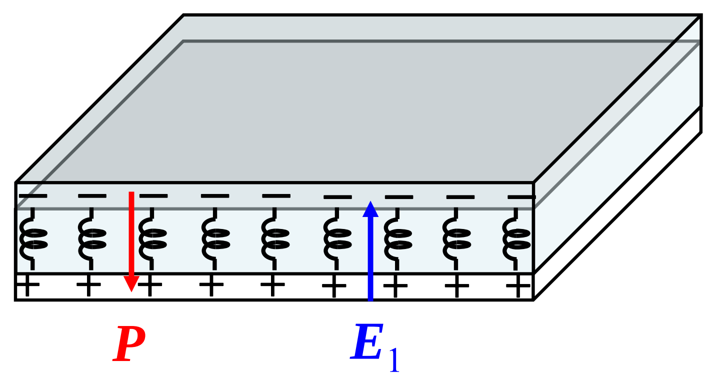
◆ 横波周波数： $\Omega_T = \omega_0$

- 電界により励起される分極（振動子の応答）が最大になる（共鳴する）周波数。
- その結果，大きな2次光が発生し（#11）、反射率が大きくなる。



◆ 縦波周波数： $\Omega_L \equiv \sqrt{\omega_P^2 + \omega_0^2}$

- $\varepsilon = 0$ となる周波数
  ⇔ 光は伝搬しないで、電子は空間的に一様に振動する。
- 金属におけるプラズマ周波数 ω_P と同様に、分極電子の集団振動の固有周波数を表す。
- ω_P よりも高いのは、集団振動時の復元力（$F_1 \propto \omega_P^2$）に、個々の固有振動 ω_0 の復元力（$F_2 \propto \omega_0^2$）が加わるから。

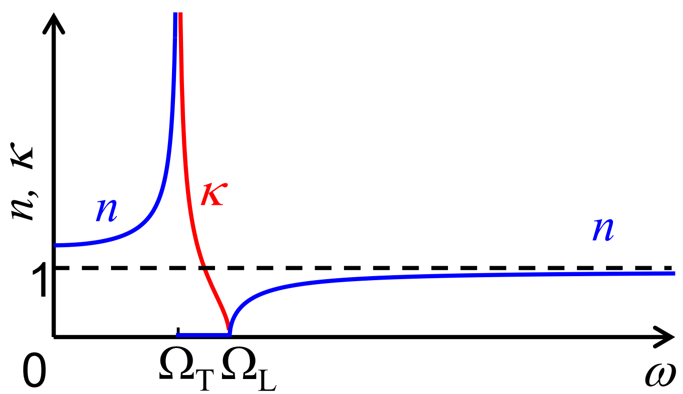


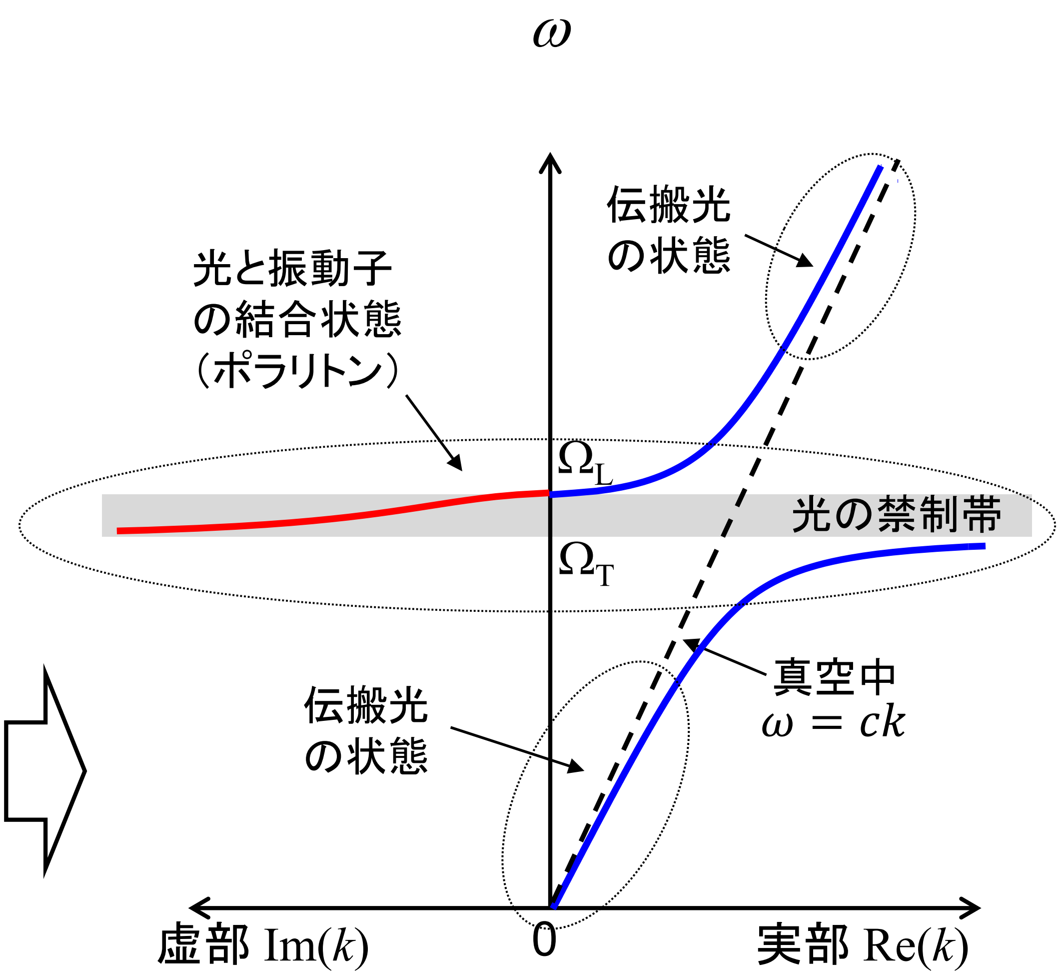
分散曲線：抵抗がない（γ=0）場合

$$k = \frac{\omega}{c}\hat{n} = \frac{\omega}{c}\sqrt{\frac{\omega^2 - \Omega_L^2}{\omega^2 - \Omega_T^2}}$$

$\Omega_T < \omega < \Omega_L$ の範囲に、光が伝搬できない"禁制帯"が発生する。

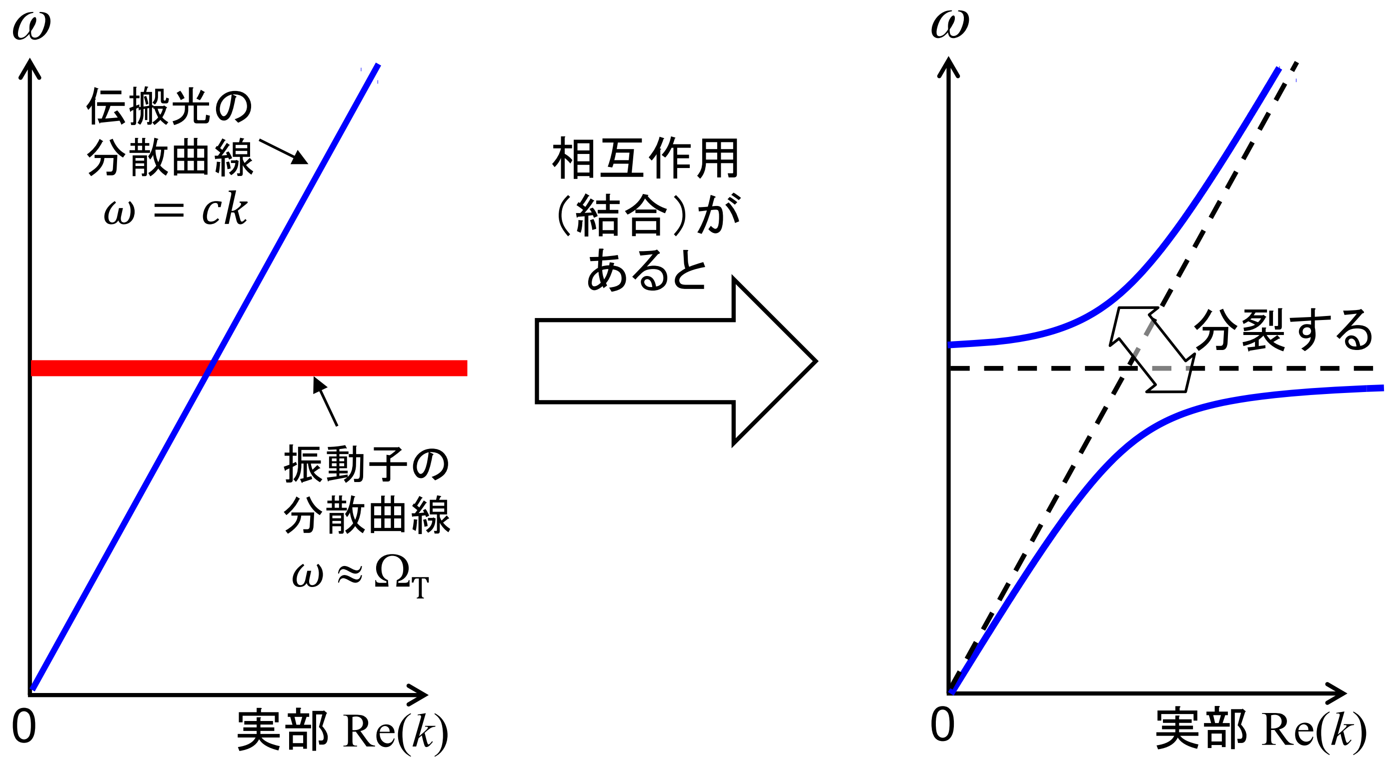
$\Omega_T = 0$ のとき、ドルーデモデル（#61）と一致する。





（補足）分散曲線の非交差則に関する一般性

- 前頁の分散曲線は、“光の分散曲線”と“振動子の分散曲線”が結合した結果として生じたものだと理解することもできる。
- 一般に、2種類の“波動”の分散曲線が1点で交わる場合、相互作用の存在下では、交点が消滅して分裂する。（非交差則）
- 分裂の大きさΔ_{LT}は、相互作用（結合）の強さに比例する。（1次摂動）

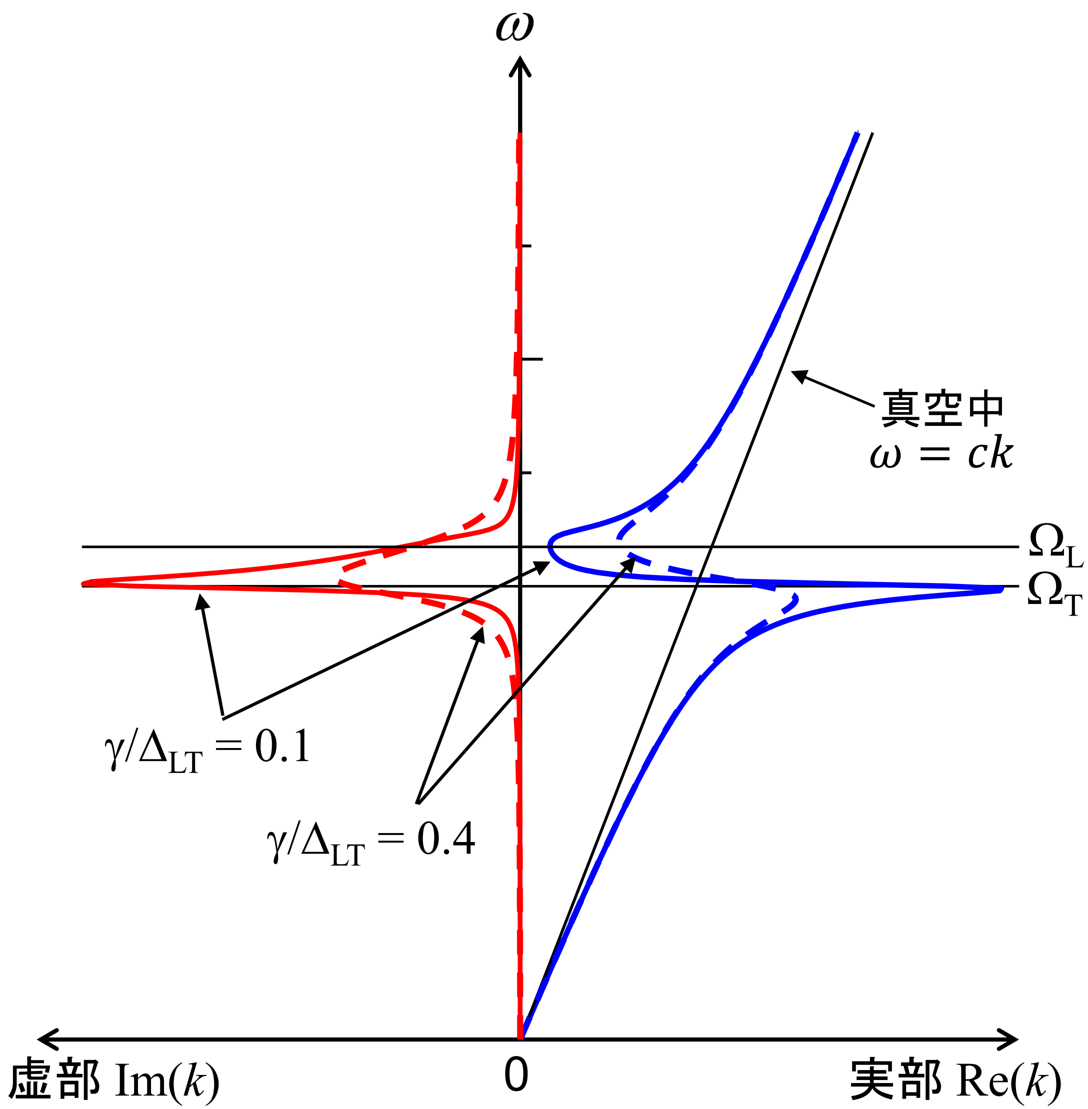


分散曲線:抵抗がある(γ>0)場合

- γがΔ_{LT}と同程度以上になると、禁制帯は消滅する。

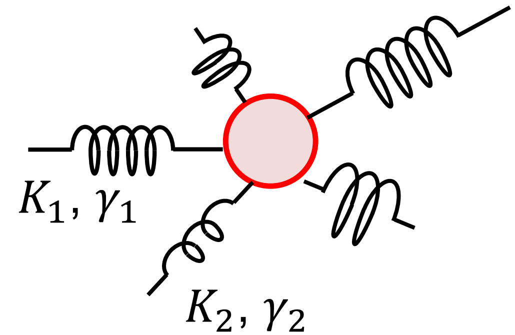
∵光から振動子にエネルギーが結合しても、すぐに振動子が減衰してしまうので、光にエネルギーが返ってこない。

- 現実的に、室温では格子振動(フォノン)による散乱が大きく、$\gamma \approx \Delta_{LT}$になる。その場合、禁制帯は消滅するが、屈折率は大きく変化する。
- 一般に、禁制帯が生じてポラリトン的な振舞いが現れるのは、低温における励起子ポラリトンなどに限られる。



振動子強度

- 実際は、電子励起だけでなく、正イオンと負イオン、分子の回転励起、など、様々な振動子が存在する。
- それぞれ異なる固有振動数 $\omega_1, \omega_2, \ldots$ を持つ振動子の重ね合せとして理解できる。



$\therefore$ #70 (2) は、

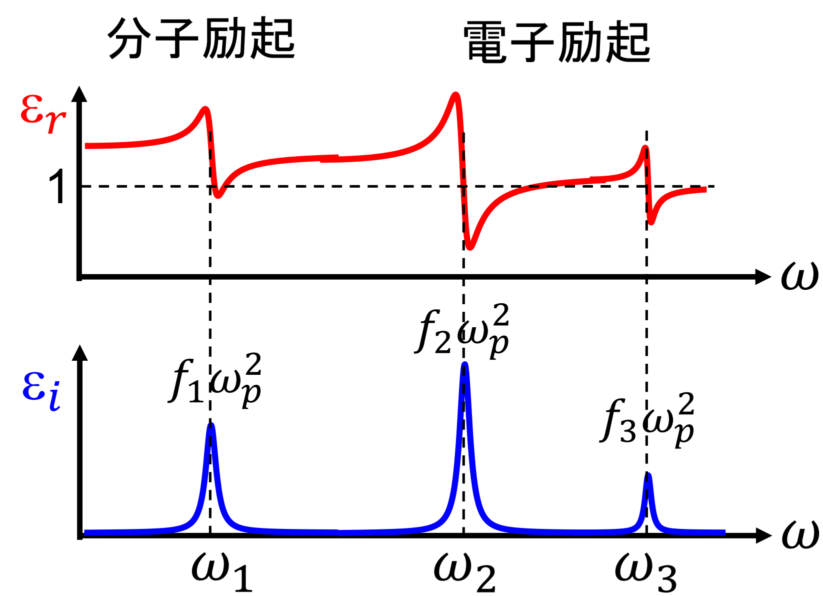
$$\boxed{\varepsilon(\omega) = 1 - \sum_j \frac{f_j \omega_p^2}{\omega^2 - \omega_j^2 + i2\gamma_j \omega}} \quad (1)$$

ただし、f_j は各振動子の相対的強度を表し、

$$\sum_j f_j = 1 \quad (2)$$

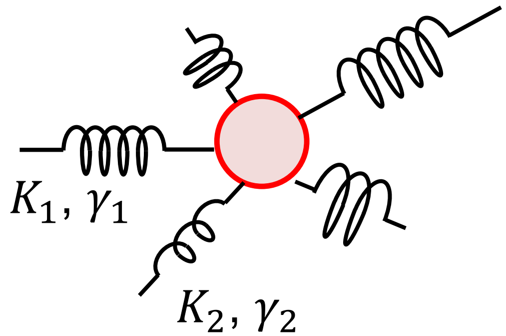
と規格化している。

一般に、$\omega_j = 0$ (ドルーデ)の極も存在する。

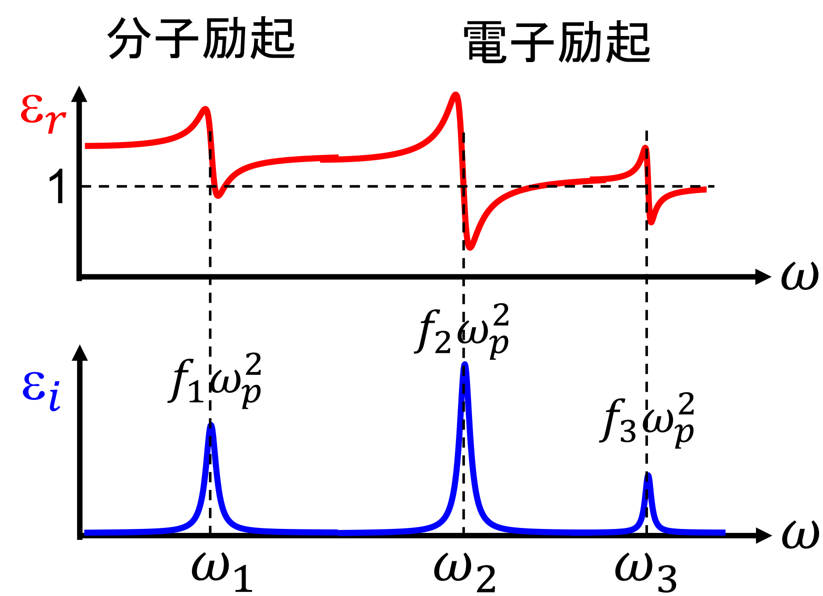


ローレンツモデルから半古典モデルへ

$$\varepsilon(\omega) = 1 - \sum_j \frac{f_j \omega_p^2}{\omega^2 - \omega_j^2 + i2\gamma_j\omega}$$



- ローレンツモデルでは、複数の振動子を仮定して $\varepsilon(\omega)$ を計算した。
- 一方、個々の振動子の強さ f_j, 固有振動数 ω_j, 減衰率 γ_j の値は、ローレンツモデルから導出できるものではなく、実験値にフィッティングするしかない。



- 各振動子の特性を定量的に議論するには、電子系を量子力学的に扱う必要がある。

➔ **半古典モデル**