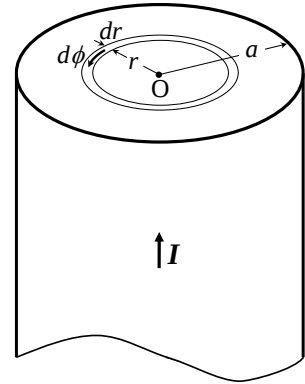


電気磁気学 II (後半 5 回目) 当日問題

【例題】

1. 半径 a の円形断面をもつ、透磁率 μ の導線を考える。導体中の電流は導体断面を一様な密度で流れるとする。

- (a) この導線に電流 I を流したときの導線内と導体外の周方向磁界 H および周方向磁束密度 B を、アンペアの法則を使って求めよ。周方向とは、電流 I の向に右ねじが進むときに右ねじが回る向きを正とする。
- (b) 導線内の半径 r の位置で、厚さ dr の円筒環部分を通る単位長さ当たりの磁束を $d\phi$ とする。磁束 $d\phi$ と鎖交する電流は、全電流 I のうちの r^2/a^2 であるので、鎖交数 N を $N = r^2/a^2$ と考えて、鎖交磁束 $d\Phi = Nd\phi$ を求めよ。
- (c) 単位長さ当たりの導体内の全鎖交磁束を求めよ。
- (d) (c) から単位長さ当たりの内部インダクタンス l_i を求めよ。
- (e) 単位長さ当たりの導体内の磁気エネルギーを求め、 $l_i I^2/2$ に一致することを確認せよ。



(参考：教科書 pp.165-166)

[解答]

(a) 導体内： $2\pi rH = \frac{r^2}{a^2}I$ より $H = \frac{rI}{2\pi a^2}$, $B = \frac{\mu rI}{2\pi a^2}$

導体外： $2\pi rH = I$ より $H = \frac{I}{2\pi r}$, $B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$

(b) $d\phi = Bdr = \frac{\mu rI}{2\pi a^2}dr$, $d\Phi = Nd\phi = \frac{r^2}{a^2} \frac{\mu rI}{2\pi a^2}dr = \frac{\mu r^3 I}{2\pi a^4}dr$

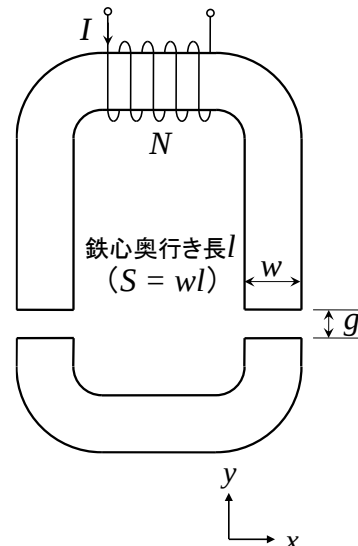
(c) $\Phi = \int d\Phi = \frac{\mu I}{2\pi a^4} \int_0^a r^3 dr = \frac{\mu I}{2\pi a^4} \frac{a^4}{4} = \frac{\mu}{8\pi} I$ (半径 a によらない)

(d) $\Phi = l_i I$ より, $l_i = \frac{\mu}{8\pi}$ [H/m]

(e) $W = \int_0^a \frac{1}{2} HB(2\pi r)dr = \frac{\mu I^2}{4\pi a^4} \int_0^a r^3 dr = \frac{\mu I^2}{16\pi} \left(= \frac{1}{2} l_i I^2 \right)$

2. 右図に示すような、透磁率無限大と考えてよい 2 つのコの字形鉄心から成る磁気回路を考える。ただし、鉄心の断面は断面積 S の矩形とし、幅 w 、奥行き長 l とする。上部鉄心にはコイルが巻かれ、巻数は N とし、電流 I が流れている。上下の鉄心間のギャップを g とする。磁束は鉄心磁路中のみを通り、ギャップでの磁束の広がりは無視できるとする。真空の透磁率は μ_0 とする。次の問いに答えよ。

- (a) ギャップ中の磁束密度 B を求めよ。
- (b) この鉄心入りコイルのインダクタンス L を求めよ。
- (c) この系に蓄えられている磁界のエネルギーを求めよ。
- (d) 上下の鉄心間に働く電磁力 F の大きさと向きを仮想変位の考え方から求めよ。



- (e) 一般に、磁界 H が存在する点において H に平行な単位面積に働く応力（磁力線に対するマクスウェルの応力と呼ばれる）は、

$$f = \frac{1}{2} \mu_0 H^2$$

と表されることが知られている。（教科書 170 ページ）。上下の鉄心間に働く電磁力 F を上式を用いて求め、(d) で求めた解と一致することを確認せよ。

- (f) 次に、下部鉄心が横に x だけずれたとき、この系に蓄えられている磁界のエネルギーを求めよ。ただし、磁極間には、上下の鉄心が対向する部分だけに磁束が通り、その磁束密度は場所に依らず一定で、対向部分の外では磁束はゼロとする。
- (g) (f) のとき、下部鉄心に働く x 方向の力 F_x を求めよ。

[解答]

- (a) 断面積 S が一定なので、閉経路上で B は一定。

鉄心内では、 $H_m = \frac{B}{\mu} \approx 0$ ($\mu \rightarrow \infty$)。ギャップでは、 $H_g = \frac{B}{\mu_0}$

アンペアの周回積分の法則より $2gH_g = NI \quad \therefore B = \frac{\mu_0 NI}{2g}, \quad H_g = \frac{NI}{2g}$

- (b) $\Phi = NBS = \frac{\mu_0 N^2 SI}{2g} \equiv LI$ より、 $\therefore L = \frac{\mu_0 N^2 S}{2g}$

- (c) $W = \frac{1}{2} LI^2 = \frac{\mu_0 N^2 SI^2}{4g}$

別解 $W = \int_{\text{全空間}} \left(\frac{1}{2} \mathbf{H} \cdot \mathbf{B} \right) dv \approx \int_{\text{ギャップ}} \left(\frac{1}{2} \mathbf{H} \cdot \mathbf{B} \right) dv = \frac{\mu_0 N^2 I^2}{8g^2} \cdot (2gS) = \frac{\mu_0 N^2 SI^2}{4g}$

- (d) (Φ = 一定の仮想変位の式を用いるため、(c) で得られた W を Φ の式として書き改める。)

$$I = \frac{\Phi}{L} \text{ より、 } W = \frac{\mu_0 N^2 I^2 S}{4g} = \frac{\mu_0 N^2 \Phi^2 S}{4g} \cdot \left(\frac{2g}{\mu_0 N^2 S} \right)^2 = \frac{g \Phi^2}{\mu_0 N^2 S}$$

$$\therefore F_g = - \left(\frac{\partial W}{\partial g} \right)_{\Phi \text{一定}} = - \frac{\Phi^2}{\mu_0 N^2 S} = - \left(\frac{\mu_0 N^2 SI}{2g} \right)^2 \frac{1}{\mu_0 N^2 S} = - \frac{\mu_0 N^2 SI^2}{4g^2}$$

(g を増やす向きが正なので) 引き付ける向き

別解 $F_g = + \left(\frac{\partial W}{\partial g} \right)_{I \text{一定}} = - \frac{\mu_0 N^2 SI^2}{4g^2}$

- (e) $F_g = - \frac{B^2}{2\mu_0} 2S = - \frac{\mu_0 N^2 SI^2}{4g^2}$ (d) に一致

- (f) (d) の結果 $W = \frac{1}{2} LI^2 = \frac{\mu_0 N^2 SI^2}{4g}$ を用いて

$$W = \frac{1}{2} LI^2 = \frac{1}{2} \frac{\mu_0 N^2 (w-x)l}{2g} I^2 = \frac{\mu_0 N^2 I^2 l}{4g} (w-x)$$

- (g) 仮想変位の考え方からは、

$$F_x = \left(\frac{\partial W}{\partial x} \right)_{I \text{一定}} = - \frac{\mu_0 N^2 I^2 l}{4g} \quad (x \text{ が小さくなる向きの力：復元力})$$