

## 電気磁気学 II (後半 3 回目) 当日問題

## 【例題】

1. 質量  $m$ , 点電荷  $q$  が  $xy$  平面内を半径  $a$ , 角速度  $\omega$  で回転しているとする。このとき, 磁気双極子モーメント  $\mathbf{m}$  は  $z$  軸方向を向き,

$$|\mathbf{m}| = \frac{qL}{2m}$$

となることを示せ。ただし,  $L (= ma^2\omega)$  は点電荷が持つ角運動量である。

## [解答]

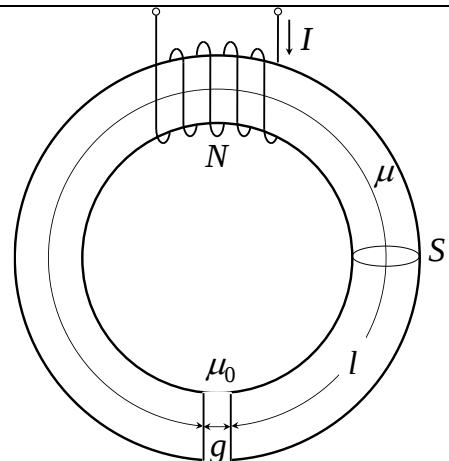
点電荷は、時刻  $2\pi/\omega$  の間に 1 周するので、電流  $I = q\omega/(2\pi)$ 。

$$\therefore |\mathbf{m}| = IS = \frac{q\omega}{2\pi} \cdot (\pi a^2) = \frac{qa^2\omega}{2} = \frac{qL}{2m}$$

(参考) 以上のように、電子の「軌道運動」に対しては、角運動量  $L$  と磁気モーメント  $\mathbf{m}$  の間で上式の関係が成り立つ。これは量子力学的にも正しい。一方、電子の自転, すなわち, 「スピン」については、量子力学的な理由から、 $|\mathbf{m}| = \frac{qL}{m}$  となることが示される。(ファインマン物理学 IV 第 13 章)

2. 右図のように、ギャップ  $g$  を有する透磁率  $\mu (>0)$  の鉄心 (線形磁性体) に、巻数  $N$  のコイルが巻かれ、電流  $I$  が流れている。鉄心の有効磁路長は  $l$ , 断面積は  $S$  である。

- (a) 鉄心の磁化率  $\chi$  が 1 に比べて十分大きいとき、磁束は外部にほとんど漏れずに鉄心内を通ると仮定できることを、境界条件から説明せよ。



以下では、磁束は全て鉄心内を通るとする。また、 $S$  は十分に小さく、鉄心内で磁束密度が一様とする。同様に、 $g$  も小さく、ギャップでの磁束の広がりが見え、ギャップ中でも磁束密度が一定とする。外部 (真空) の透磁率は  $\mu_0$  として、次の問いに答えよ。

- (b) 鉄心内、および、ギャップ中の、磁束密度  $\mathbf{B}$ , 磁界の大きさ  $\mathbf{H}$ , 磁化  $\mathbf{M}$  をそれぞれ求め、概形を図示せよ。

## [解答]

- (a) 磁性体と外部の境界面で磁界  $H$  の接線成分は連続である。

磁性体中の磁界を  $H_m$  空気中の磁界を  $H$  とすると、境界条件より、 $H = H_m$

$$\therefore \frac{B_m}{B} = \frac{\mu H_m}{\mu_0 H} = \frac{\mu}{\mu_0} = 1 + \chi \gg 1 \quad \therefore \text{磁束は鉄心内を通ると仮定できる。}$$

(補足) 実際、鉄の  $\chi$  は (純度にもよるが)  $10^3$  程度。従って、上記の近似はそこそこ妥当。

(b) まず、 $\text{div } \mathbf{B} = 0$ ,  $S$  は一定なので、ループ上で  $\mathbf{B}$  は一定。

$$\therefore \mathbf{H} = \begin{cases} \frac{\mathbf{B}}{\mu} & (\text{磁性体内}) \\ \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} & (\text{ギャップ内}) \end{cases}$$

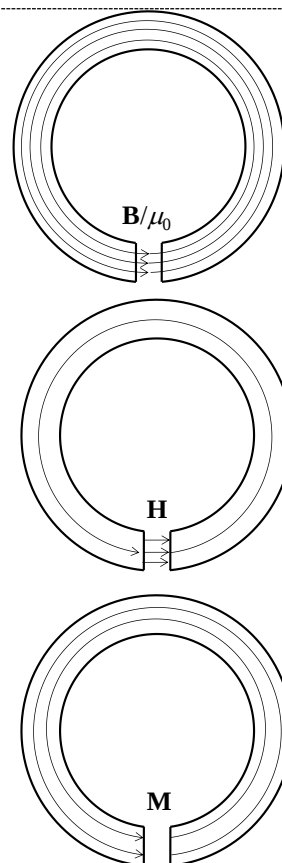
アンペアの周回積分の法則を使って、 $\frac{B}{\mu}l + \frac{B}{\mu_0}g = NI$

$$\therefore B = \frac{NI}{\frac{l}{\mu} + \frac{g}{\mu_0}} \quad \blacksquare$$

$$\text{磁性体中の磁界の強さ } H_m = \frac{B}{\mu} = \frac{NI}{l + \frac{\mu}{\mu_0}g} \quad \blacksquare$$

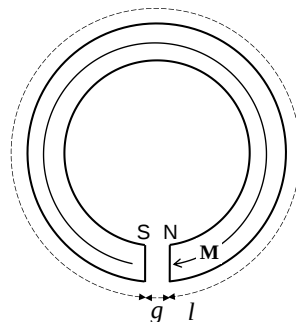
$$\text{ギャップ中の磁界の強さ } H_g = \frac{B}{\mu_0} = \frac{NI}{\frac{\mu_0}{\mu}l + g} \quad \blacksquare$$

$$\mathbf{M} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} - \mathbf{H} = \begin{cases} \frac{NI(\mu - \mu_0)}{\mu_0 l + \mu g} & (\text{磁性体内}) \\ 0 & (\text{ギャップ内}) \end{cases} \quad \blacksquare$$



3. 右図のような環状の永久磁石を考える。

磁石の内部には S 極から N 極に向けて固定の磁化  $\mathbf{M}$  が生じている。磁石内外の磁束密度  $\mathbf{B}$ , 磁界の強さ  $\mathbf{H}$  を求め、図示せよ。問 1 と同様に、磁石内とギャップ中で磁束密度は一樣とする。(ヒント：永久磁石の内部では、 $\mathbf{B}$  に寄らずに  $\mathbf{M}$  が一定。右図の場合、自由電流はないので、 $I_F = 0$ )



4. 真空中に置かれた磁化率  $\chi (>0)$  の薄くて十分に広い鉄板に、一様な外部磁界  $\mathbf{H}$  を印加する。次のそれぞれの場合について、鉄板内部を  $\mathbf{M}$  まで磁化するのに必要な磁界  $\mathbf{H}$  を求めよ。どちらの方向の方が効率良く磁化できるか？また、そのときの  $\mathbf{B}/\mu_0$ ,  $\mathbf{H}$ ,  $\mathbf{M}$  の概略を図示せよ。

(a) 鉄板に対して平行の方向に磁界をかけた場合

(b) 鉄板に対して垂直の方向に磁界をかけた場合