2019.11.25　種村

電気磁気学 II（後半 2 回目）当日問題

【例題】

1．z 軸上を正の向きに電流 I が流れている場合を考える。以下の問に答えよ。

(a)　z 軸から距離 a の点におけるベクトルポテンシャル **A** を次の２通りの方法で求め、結果が一致する（定数の差の任意性はある）ことを確かめよ。

① (1.11)式（教科書(6.33)式）を用いて直接 **A** を計算せよ。なお，以下の不定積分の関係式を用いてよい。

$$\int \frac{1}{\sqrt{z^2+a^2}}dz = \log\left(z+\sqrt{z^2+a^2}\right)+C \quad (C\ \text{は定数})$$

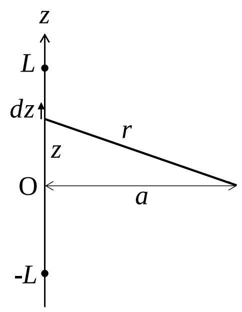
ヒント：まず、$-L \le z \le L$ の有限の範囲で積分を計算する。**A** の基準はどこにとっても良い（静電ポテンシャルと同じ）ので、a を含まない定数項は無視する。最後に$L \to +\infty$ の極限を考える。

② z 軸上に線電荷密度 λ の一様な電荷が存在するときの静電ポテンシャル V を求め、λ を電流の x, y, z 各成分に、ε_0を$1/\mu_0$に置き換えてみよ。(教科書 p.111 例題 6.5)

(b)　(a)で求めた **A** から磁束密度 **B** を計算せよ。ビオ・サバールの式を用いて **B** を直接求めた場合（第 1 回演習問題 1(b)）の結果に一致することを確かめよ。

(c)　$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$となることを確かめよ。

［解答］



(a) ① x, y 方向の電流は零なので、$A_x = A_y = 0$.　(1.11)より

$$A_z = \frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{i}{r}dv = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_{-L}^{L}\frac{I}{r}dz = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_{-L}^{L}\frac{I}{\sqrt{z^2+a^2}}dz$$

$$= \frac{\mu_0 I}{4\pi}\left[\log\left(z+\sqrt{z^2+a^2}\right)\right]_{-L}^{L} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\log\frac{L+\sqrt{L^2+a^2}}{-L+\sqrt{L^2+a^2}}$$

$$= \frac{\mu_0 I}{4\pi}\log\frac{\left\{L+\sqrt{L^2+a^2}\right\}^2}{a^2} = \frac{\mu_0 I}{2\pi}\log\frac{L+\sqrt{L^2+a^2}}{a}$$

$$= \frac{\mu_0 I}{2\pi}\left[\log\frac{1+\sqrt{1+(a/L)^2}}{a}+\log L\right]$$

$\log L$ の項は定数なので無視し（静電ポテンシャルと同様に **A** の原点は任意なので、$\frac{\mu_0 I}{2\pi}\log L$ だけずらすと考える)、$L \to +\infty$ の極限を取ると、$A_z = \frac{\mu_0 I}{2\pi}\log\frac{2}{a} = \frac{\mu_0 I}{2\pi}(\log 2 - \log a)$

$\log 2$ の項も定数なので無視すると、$A_z = -\frac{\mu_0 I}{2\pi}\log a$ ■

② z 軸上に線密度λ の一様な電荷が存在するときの静電ポテンシャルを計算してみる。

ガウスの定理より，z 軸から距離 r の位置における電界は，$E(r) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}$

$$\therefore V(r) = -\int_{r_0}^{r}E(r)dr = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}(\log r - \log r_0)$$

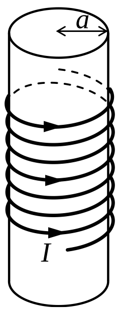
$\log r_0$ の項は定数なので無視。$\varepsilon_0 \to 1/\mu_0, r = a$ とし、z 方向の電流 $\lambda \to I,$とすると、$A_z = -\frac{\mu_0 I}{2\pi}\log a$ ．一方、x, y 方向の電流は 0 なので、$\lambda = 0$ より $A_x = A_y = 0$ ■

(b) $A_z = -\frac{\mu_0 I}{2\pi}\log\sqrt{x^2+y^2} = -\frac{\mu_0 I}{4\pi}\log(x^2+y^2)$

$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$より、$B_x = \frac{\partial A_z}{\partial y} = -\frac{\mu_0 I}{2\pi}\ \frac{y}{x^2+y^2}$,$B_y = -\frac{\partial A_z}{\partial x} = \frac{\mu_0 I}{2\pi}\ \frac{x}{x^2+y^2}$,$B_z = 0$ ■

(c) $\frac{\partial B_x}{\partial x} = \frac{\mu_0 I}{\pi}\ \frac{xy}{(x^2+y^2)^2}$,$\frac{\partial B_y}{\partial y} = -\frac{\mu_0 I}{\pi}\ \frac{xy}{(x^2+y^2)^2}$, $\frac{\partial B_z}{\partial z} = 0$　　$\therefore \nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ ■

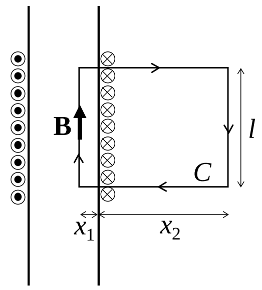
２．右図のように、半径 a でコイル状に巻かれた導体（ソレノイドと言う）に電流 I を流したときに、ソレノイド内に発生する磁界の磁束密度をアンペアの法則を用いて求めよ。ただし、コイルは単位長あたり n 回巻かれているものとする。（教科書 101 頁，例題 6.2）



先週の課題の結果と一致することを確かめよ。

［解答］

右図のような閉経路 C を考え，(1.21)式を適用.



左辺：$\oint_C \mathbf{B}\cdot d\mathbf{s} = \oint_{左} \mathbf{B}\cdot d\mathbf{s} + \oint_{上} \mathbf{B}\cdot d\mathbf{s} + \oint_{右} \mathbf{B}\cdot d\mathbf{s} + \oint_{下} \mathbf{B}\cdot d\mathbf{s}$

少なくとも $x_2 \to\infty$ の極限では第 3 項（右の項）は 0.（実際は，任意の x_2（>0）で 0.）

ソレノイドが無限であれば，<u>対称性より</u>，$\mathbf{B}$ の x 方向成分は 0.

∴第 2 項と第 4 項も 0.

$$\therefore \oint_C \mathbf{B}\cdot d\mathbf{s} = \oint_{左} \mathbf{B}\cdot d\mathbf{s} = Bl$$

（ソレノイドの長さが無限なので，ソレノイド内の B は l 方向一様とした.）

右辺：$\mu_0 \times [C を鎖交する全電流] = \mu_0 n l I$

以上より，$B = \mu_0 n I$ ■

B は x_1 によらない．つまり，ソレノイドの内部で磁束密度 B は一様.

３．ベクトルポテンシャル $\mathbf{A} = (A_x, A_y, A_z)$ が

$$A_x = -\frac{a}{a+b} B_0 y$$

$$A_y = \frac{b}{a+b} B_0 x$$

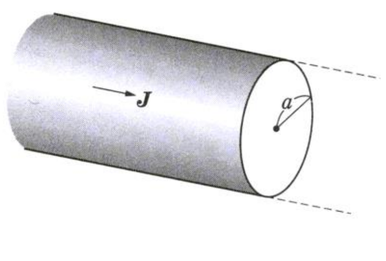
$$A_z = 0$$

と表されている。ただし，a, b, B_0 は正の定数である。

(a) 磁束密度 $\mathbf{B}$ を求めよ。

(b) xy 平面上に $\mathbf{A}$ の概形を図示してみよ。(ベクトルポテンシャルの方向が電流の方向とほぼ平行になることを実感してみよう。)

４．半径 a の無限長円柱導体の内部を一様な電流密度 J (A/m²)で電流が流れているとき，導体内外の磁束密度 $\boldsymbol{B}$ の分布をアンペアの法則を用いて求めよ。

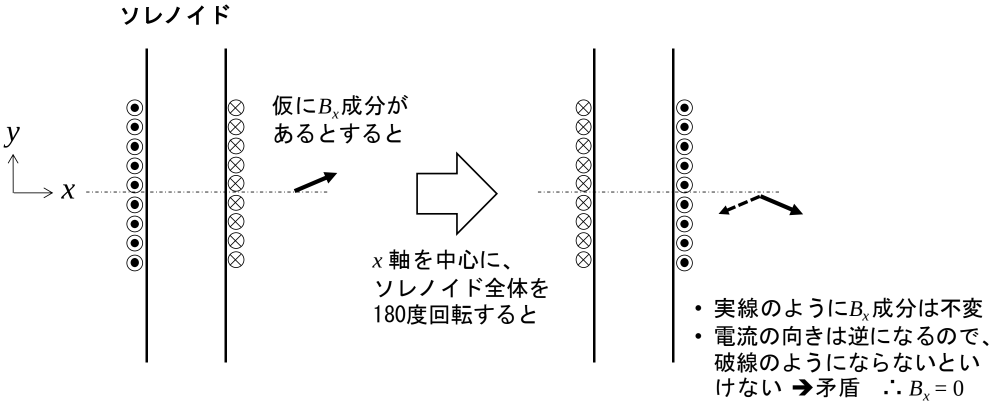


◆ 「対称性により…」をちゃんと説明する

- ある対称軸に対して系を「180 度回転」させたとき、系が不変、もしくは、系はそのままで電流の向きが逆になるだけ、という場合に注目する。
- 磁束密度 **B** は電流に比例するため、電流の符号が変わるときは、**B** の向きも逆にならないといけない。

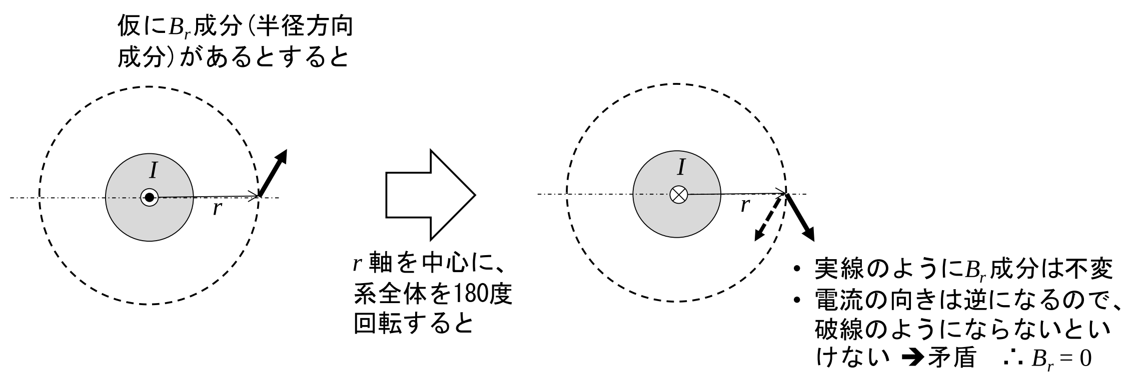
※注 : ここで考えるのは「回転」でなければならない。対称だからと言って、「反転」させてはならない。
反転させると、*xyz* 座標系が右手系から左手系になってしまうので、**B** の定義式が変わってしまう。
（ローレンツ力の式において、**B** → −**B** にする必要がある。）

［例１］無限長ソレノイド内外の磁束密度



∴ 「対称性により、無限長のソレノイドの内外で、**B** は（少なくとも）y 軸方向を向く」と言える。その結果、長方形の閉経路で周回積分した際、上下の辺（*x* 方向）の線積分を零としたのである。実際は、ソレノイドの外側では **B** = 0 となることが、その後導かれる。

［例２］円筒電流の周りの磁束密度



∴ 「対称性により円筒電流の周りの **B** は周回方向を向く」と言える。