ベクトル微分演算子の定義とその直観的イメージ

$f(x,y,z)$：スカラー関数
$\mathbf{u}(x,y,z) \equiv \left(u_x, u_y, u_z\right)^{tr}$：ベクトル場
$\nabla \equiv \left(\partial_x, \partial_y, \partial_z\right)^{tr}$：$(x,y,z)$に対する微分演算子（ナブラ）

◆ 勾配（gradient）：∇f

【定義】

$$\nabla f = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x} \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} \\ \dfrac{\partial f}{\partial z} \end{bmatrix}$$

【意味】

位置(x,y,z) において

・∇fの方向：fの変化（傾き）が最大となる方向。つまり、等位面（２次元の場合は等高線）に垂直な方向。
・∇fの向き：fが大きくなる向き。
・$|\nabla f|$：その向きにおけるfの傾き。

【直観的イメージ】

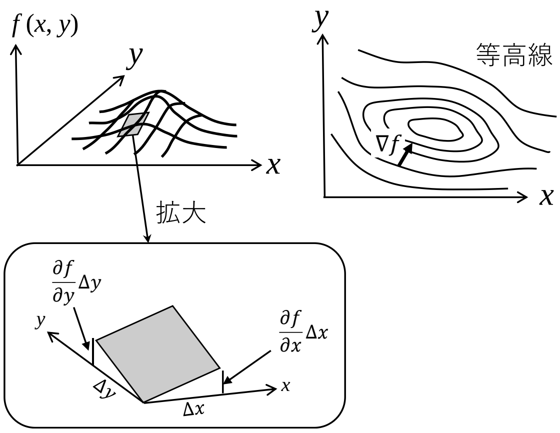
簡単のため，２次元 $f(x,y)$ の場合を考える。
右図より、ある点(x_0,y_0)近傍における$f(x,y)$ は、

$$\begin{aligned} f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) &= f(x_0,y_0) + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\Delta x + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)\Delta y \\ &= f(x_0,y_0) + \nabla f \cdot \mathbf{u} \end{aligned}$$

ただし、$\mathbf{u} \equiv \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix}$

$|\mathbf{u}| =$ 一定 のもとで内積 $\nabla f \cdot \mathbf{u}$ が最大になるのは、$\mathbf{u}$ が∇fに平行のとき。
つまり∇fは、「fが最も大きく増える向き（傾きが最大となる向き）」を指す。すなわち、∇fは、等高線（３次元の場合は等位面）に垂直になる。
また、$|\nabla f|$ は、そのときの傾きを表す。

2次元の場合



【例】

・電界 $\mathbf{E} = -\nabla V$　電界は、静電ポテンシャル V が最も急激に下がる方向を向く。

◆ ラプラシアン（**Laplacian**）：$\nabla^2 f$

【定義】

$$\nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

$$\nabla^2 \mathbf{u} = \begin{pmatrix} \nabla^2 u_x \\ \nabla^2 u_y \\ \nabla^2 u_z \end{pmatrix}$$

【意味】

「(自分の周囲の平均) －（自分)」
　つまり，fの「へこみ」,「たわみ」を表す。

u_x, u_y, u_z 各成分の「へこみ」,「たわみ」を表す。

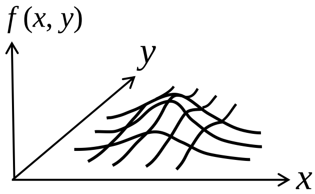
【直観的イメージ】

簡単のため，２次元の場合 $\left(\nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)$ について，
離散化して考える。

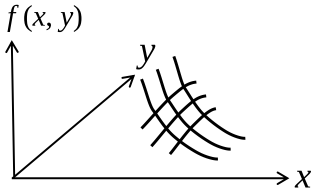
$$\frac{\partial f}{\partial x} \to \frac{f(x+\Delta x,\ y) - f(x,y)}{\Delta x}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \to \frac{1}{\Delta x}\left[\frac{f(x+\Delta x,y) - f(x,y)}{\Delta x} - \frac{f(x,y) - f(x-\Delta x,y)}{\Delta x}\right]$$
$$= \frac{1}{(\Delta x)^2}[f(x+\Delta x) + f(x-\Delta x) - 2f(x)]$$

$\Delta y = \Delta x$とすると,
$$\nabla^2 f = \frac{4}{(\Delta x)^2}\left[\frac{f(x+\Delta x,y)+f(x-\Delta x,y)+f(x,y+\Delta y)+f(x,y-\Delta y)}{4} - f(x,y)\right]$$



$\nabla^2 f < 0$（ふくらみ）



$\nabla^2 f = 0$（たわみ無し）

上式の括弧内，第１項は『周囲近傍４点（東西南北）の値の平均』,
第２項は『自分の値』を表す。∴$\nabla^2 f$は「(周囲の平均) －（自分)」。
３次元の場合も同様。「(x, y, z 全ての方向周囲６点の平均) －（自分)」になる。

ちなみに、１次元の場合は、単なる２階微分$\left(\nabla^2 f = \frac{d^2 f}{dx^2}\right)$である。２階微分の正負が「下に凸（へこみ)」か「上に凸（ふくらみ)」かを表すのは既知の通りである。$\nabla^2 f$は、それを多次元に拡張したに過ぎない。

【例】

・熱拡散方程式：$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{dt}} \propto \nabla^2 T$　　周りに比べて温度が異なると均等化される（出る杭は打たれる）

・ポアソン方程式：
　$\nabla^2 V = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$　ポテンシャルVに“ふくらみがある”ところには、正電荷がある。
　$\nabla^2 \mathbf{A} = -\mu_0 \mathbf{i}$　ベクトルポテンシャル$\mathbf{A}$が“たわんで”いるところには、電流がある。

◆ 発散（divergence）: $\nabla\cdot\mathbf{u}$ (div **u**)

【定義】

$$\nabla\cdot\mathbf{u}=\frac{\partial u_x}{\partial x}+\frac{\partial u_y}{\partial y}+\frac{\partial u_z}{\partial z}$$

【意味】

「（位置(x,y,z) から出ている$\mathbf{u}$の総和）

－（位置(x,y,z) に入ってくる$\mathbf{u}$の総和）」

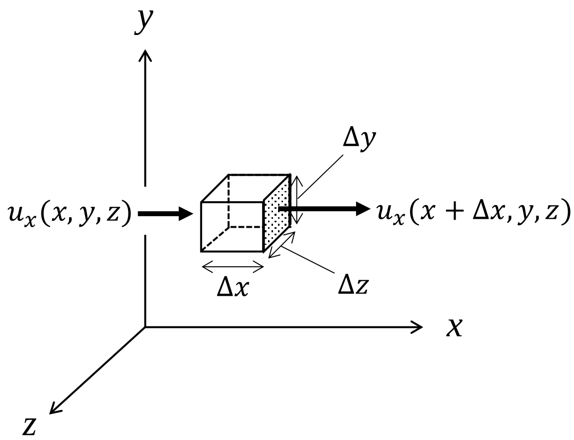
つまり，**u** の「湧き出し」，「増分」，「収支バランス」を表す。

【直観的イメージ】

位置(x,y,z)にある、微小な箱を考える。

$\frac{\partial u_x}{\partial x}\to\frac{u_x(x+\Delta x,y,z)-u_x(x,y,z)}{\Delta x}$, $\frac{\partial u_y}{\partial y}$, $\frac{\partial u_z}{\partial z}$も同様。

$$\therefore\frac{\partial u_x}{\partial x}+\frac{\partial u_y}{\partial y}+\frac{\partial u_z}{\partial z}$$
$$\to\frac{1}{\Delta x\Delta y\Delta z}[\{u_x(x+\Delta x,y,z)-u_x(x,y,z)\}(\Delta y\Delta z)$$
$$+\{u_y(x,y+\Delta y,z)-u_y(x,y,z)\}(\Delta x\Delta z)$$
$$+\{u_z(x,y,z+\Delta z)-u_z(x,y,z)\}(\Delta x\Delta y)]$$



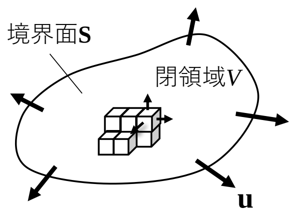
鍵括弧内の第 1 項は、微小箱の x 方向の側面$\Delta y\Delta z$を垂直に横切る流量の「増分（収支）」を表す。

同様に，第 2 項，第 3 項は y, z 方向の増分を表す。

それら全ての和なので、$\nabla\cdot\mathbf{u}$ は増分の合計を表す。

【ガウスの定理】

$$\iiint_V(\nabla\cdot\mathbf{u})\,\mathrm{dV}=\iint_S\mathbf{u}\cdot\mathbf{dS}$$



微小箱 1 個ずつの湧き出し量$\nabla\cdot\mathbf{u}$を、ある閉領域 V 内で体積積分すると、「V の境界面 S から流出する$\mathbf{u}$の総和」が求まる。

【例】

・ガウスの法則：$\nabla\cdot\mathbf{E}=\frac{\rho}{\varepsilon_0}$ 電界$\mathbf{E}$の増分があるところには、必ず電荷ρが存在する。

・磁荷の非存在：$\nabla\cdot\mathbf{B}=0$ 磁束密度$\mathbf{B}$は、あらゆる位置にて増分がなく連続的に分布する。

◆ 回転（rotation）： $\nabla\times\mathbf{u}$ （rot **u**）

【定義】

$$\nabla\times\mathbf{u}=\begin{bmatrix}\dfrac{\partial u_z}{\partial y}-\dfrac{\partial u_y}{\partial z}\\ \dfrac{\partial u_x}{\partial z}-\dfrac{\partial u_z}{\partial x}\\ \dfrac{\partial u_y}{\partial x}-\dfrac{\partial u_x}{\partial y}\end{bmatrix}$$

【意味】

uで表される水流によって回転する“微小な水車”を位置(x,y,z) に置いたとき，

- $\nabla\times\mathbf{u}$の方向：水車の回転が最大となるような方向
- $\nabla\times\mathbf{u}$の向き：水車が回転する方向に右ネジを回したときにネジが進む向き
- $|\nabla\times\mathbf{u}|$：このときの水車の回転の大きさ

つまり，**u** の「渦」の大きさと向きを表す。

【直観的イメージ】

xy 平面上に置かれた“微小な水車”を考える。

y 方向の流れu_yが水車に与える反時計回りの向きの回転は、

$$\frac{u_y(x+\Delta x,y)-u_y(x,y)}{\Delta x}\rightarrow\frac{\partial u_y}{\partial x}$$

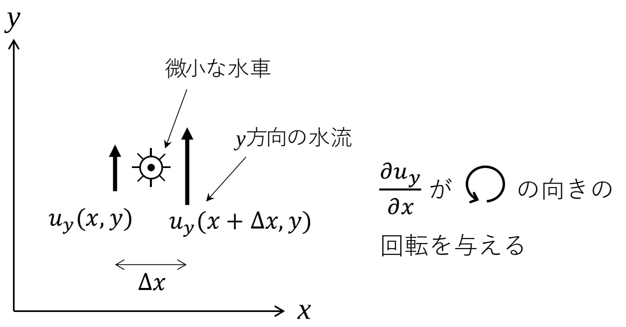
x 方向の流れu_xが水車に与える反時計回りの向きの回転は、

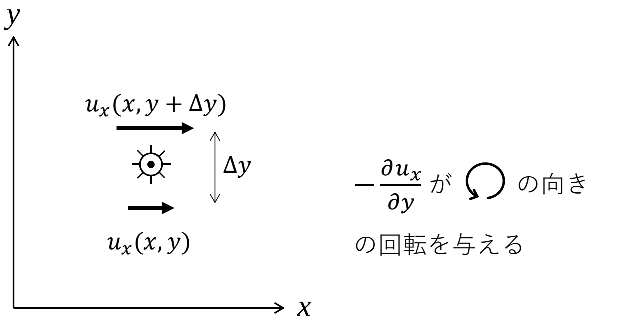
$$-\frac{u_x(x,y+\Delta y)-u_x(x,y)}{\Delta y}\rightarrow-\frac{\partial u_x}{\partial y}$$

つまり，$\nabla\times\mathbf{u}$ の z 成分 $\dfrac{\partial u_y}{\partial x}-\dfrac{\partial u_x}{\partial y}$ は、

「z 方向を向いている無限に小さな水車が反時計回り（右ネジ）に回転する速度」

を表す。x,y 成分も同様。



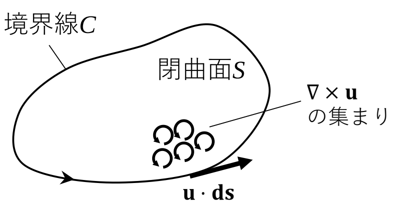


【ストークスの定理】

$$\iint_S(\nabla\times\mathbf{u})\cdot\mathbf{dS}=\oint_C\mathbf{u}\cdot\mathbf{ds}$$

１点ずつの回転量$\nabla\times\mathbf{u}$を、ある閉曲面 S 上全てで面積分すると、

「S の境界線 C 一周上の **u**の総和」が求まる。



【例】

- 電界保存則（静電界の場合）：$\nabla\times\mathbf{E}=0$ 電界**E**は一周積分すると零になる。**E**に“渦”はない。
- アンペアの法則（静磁界の場合）：$\nabla\times\mathbf{B}=\mu_0\mathbf{i}$ 電流**i**があるところには、磁束密度**B**の渦が発生する。
- ベクトルポテンシャル：$\nabla\times\mathbf{A}=\mathbf{B}$ **A**の流れによって水車が回るとその中心軸から**B**が発生する。

[参考文献]

長沼伸一郎，物理数学の直観的方法（第２版），通商産業研究社（2000）.