電気磁気学 I. 補足資料 (2017.11.20)

出典: ファインマン物理学 III 電磁気学

ない．われわれの理論は鉄の磁性は内部電流から由来し，その電流は $\boldsymbol{j}$ 項の中にすでに考慮されていると考えている．

物質は基本的な見方をすると大変に複雑なものである．誘電体を理解しようとしたとき経験した通りである．われわれの議論を中断しないために，鉄のような磁性物質の内部機構をくわしく扱うのは少しあとまで待たねばならない．今のところ磁気はすべて電流から来るもので，永久磁石には永久内部電流があると認めなくてはならない．鉄のばあいこの電流は自分の軸のまわりにスピンしている電子によって起こる．電子にはこのようなスピンがあり，小さい循環電流に対応する．もちろん電子１個のつくる磁場は小さいが，一片の物質にも億の億倍の電子がある．しかしこれらのスピンは勝手な方向をむいていて，正味の効果はないのがふつうである．不思議なことに鉄のような少数の物質では多くの電子は軸を同じ方向に向けてスピンしている．鉄では各原子の２個の電子がこの協同運動に寄与している．棒磁石の中には多数の電子があって同じ向きにスピンしている．そしてその全体の効果は棒の表面に電流がまわるのと同じになることが諸君に分るだろう．(誘電体でみたのと同様であって，このばあい一様に分極した誘電体は表面上の電荷分布と同等である．) それで棒磁石がソレノイドと同等なのは偶然ではない．

13-6 電磁場の相対性

電荷に働く磁気力が速度に比例すると言ったとき，諸君の中には次の疑問をもった人があろう：“どんな速度だろう．どんな座標系を基準としてだろう”．この章のはじめに与えた $\boldsymbol{B}$ の定義から明らかなように，このベクトルが何であるかは電荷の速度をきめるための基準系に何をえらぶかに関係する．しかし磁場をきめる正当な座標についてはまだ何も言っていない．

任意の慣性系が正当な座標系であることが分っている．また磁気と電気とは独立ではなく，一つの完全な電磁場としていつも一緒に考えねばならない．静電磁場ではマクスウェル方程式は別々の対に分れ，一つの対は電気，もう一つは磁気で，その間に結びつきはないようにみえるけれども，本質的には相対性原理から起こる大変密接な結びつきがある．歴史的にいうと相対性原理はマクスウェル方程式の後に発見された．事実電気と磁気の研究がついにアインシュタインの相対論の発見へと導いた．しかし相対性原理が電磁気に適用されるとしたなら——事実そうだが——相対性の知識から磁気力について何が分るかをみよう．

一つの負電荷が速度 v_0 で電流の流れている針金に平行に動くとする（図 13-10）．この現象を二つの基準座標から眺めて理解したい．一つは図の (a) で針金に固定したもの，もう一つは (b) で粒子に対して固定したものである．はじめの座標を S，あとのを S′ とよぶ．

S でみると，明らかに磁気力が働いている．磁気力は針金（の中心）

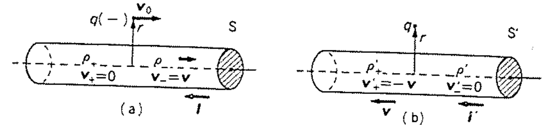

図 13-10 電流の流れている電線と電荷 q をもつ粒子の間の相互作用を二つの座標系から見る (a)座標系 S では電線が静止している (b)S′ では電荷が静止している

へ向っているので，もし電荷の運動が自由ならそれは針金に向ってまがるはずである．しかし S′ でみると速度が 0 であるから磁気力は存在し得ない．従ってそれは静止したままでいるのだろうか．二つの座標でみるものがちがっているだろうか．相対性原理によると S′ でも粒子が針金に向って動くのがみられるはずである．なぜそうなるかを理解したいと思う．

電流の流れている針金を微視的に記述しよう．銅のようなふつうの導体では，電流は一部の負電子の運動によって起こる．これを伝導電子とよぶ．一方正電気をもつ核や他の電子は物質自体に固定されている．伝導電子の密度を ρ_-，S からみたその速度を $\boldsymbol{v}$ とする．S からみてとまっている電荷の密度 ρ_+ は ρ_- の符号をかえたものに等しい．(針金全体として帯電していないと考えるから．) この場合針金の外には電場はないので，動く粒子に働く力はちょうど

$$\boldsymbol{F} = q\boldsymbol{v}_0 \times \boldsymbol{B}$$

である．

針金の軸から r のところの磁場に対する式(13.18)を使うと，この粒子に働く力は針金に向っていて，大きさは

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2}\frac{2Iqv_0}{r}.$$

式(13.4)と(13.5)によると I は $\rho_- vA$ である．ここに A は針金の断面積．従って

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2}\frac{2q\rho_- Avv_0}{r}. \qquad (13.20)$$

v と v_0 とが任意であるという一般の場合を続けてもよいが，粒子速度 v_0 が伝導電子の速度 v と等しい特別のばあいを考えるのも，同様に有効である．それで $v=v_0$ とかくと，式(13.20)は

$$F = \frac{q}{2\pi\epsilon_0}\frac{\rho_- A}{r}\frac{v^2}{c^2}. \qquad (13.21)$$

@ S

次に S′ で起こることをみよう．そこでは粒子は静止していて針金が速さ v で走りすぎる（図では左へ）．針金と一緒に走る正電荷は粒子の所にある磁場 B' をつくる．しかし粒子は静止しているから，**磁気力はない**！ 粒子に力が働くとすれば，それは電場からくる力である．従って動く針金は電場をつくるはずである．しかしそれには針金が帯**電してみえなくてはならない**——電流のある中性の針金が動くと帯電してみえるはずである．

これはしらべてみる必要がある．Sで知っていることからS′における針金の電荷密度を計算してみなくてはならない．どちらも同じであると考えるかも知れない．しかしSとS′とでは長さがちがう（第Ⅰ巻第15章）から，体積もかわる．電荷密度は電荷の占める体積に関係するから，密度もまた変わるはずである．

S′からみた電荷密度をきめるまえに，走っているときに電子のビームの電荷がどうなるかを知らねばならない．粒子の見かけの質量は $1/\sqrt{1-v^2/c^2}$ だけ変化することを知っている．電荷も同様に変わるだろうか．そうではない．電荷は動いていてもいなくてもいつも同じである．そうでなければ全電荷の保存は成り立たないだろう．

最初帯電していなかった物質，たとえば導体を考える．それを熱する．電子の質量は陽子とちがうので，電子と陽子の速度はちがう分量だけ変化する．もし粒子の電荷が速度で変化するならば，熱した物体の中で，電子の電荷は陽子の電荷と同じでなくなる．物体は熱すると帯電してくるだろう．まえにみたように，物体内の電子電荷がごく小さい割合だけ変化しても，物体はぼう大な電場を生ずるはずである．こんな現象はいまだ観測されていない．

また物質内で電子のもつ速さは化学組成に関係することを指摘したい．速さで電荷が変わるとすると，物体のもつ正味の電荷は化学反応で変化することになる．簡単な計算によると，電荷がごくわずか速さにより変化しても簡単な化学変化の結果としてぼう大な場が生ずることになる．こんな効果が見出されたことはないので，個々の粒子の電荷は運動状態に無関係であると結論される．

そこで粒子のもつ電荷は基準の座標系に無関係なスカラー量である．その意味は任意の座標系で電子分布の電荷密度は単位体積あたりの電子数にちょうど比例するということである．相対論的に長さが短縮するために体積が変化できることとさえ注意すればよい．

この考えを動く針金に適用しよう．長さ L_0 の針金をとるとき，その中に静止した電荷の密度 ρ_0 があると，それは全電荷 $Q=\rho_0L_0A_0$ を含む．同じ電荷を速度 v で動いている別の座標でみると，長さが短くなって

$$L=L_0\sqrt{1-v^2/c^2} \tag{13.22}$$

で，同じ断面 A_0 をもつ物体の中にあることになる（運動に直角な長さは変わらないから）．図13-11をみよ．

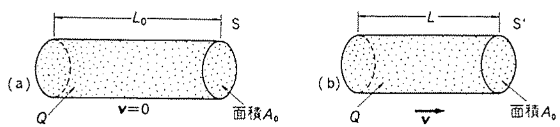

図13-11　静止した荷電粒子が電荷密度 ρ_0 で分布するとき相対速度 v の座標系でみると同じ電荷が密度 $\rho=\rho_0/\sqrt{1-v^2/c^2}$ をもつ

動く座標系での電荷密度を ρ とすると，全電荷 Q は ρLA_0 になる．電荷はどの座標からみても同じだからこれは $\rho_0L_0A_0$ に等しいはずである．従って $\rho L=\rho_0L_0$，あるいは（13.22）から

$$\boxed{\rho=\frac{\rho_0}{\sqrt{1-v^2/c^2}}}. \tag{13.23}$$

動く電荷分布の電荷密度は，粒子の相対論的質量と同様に変化する．

次にこの一般的結論を針金の正電荷密度 ρ_+ に応用する．この電荷はSでは静止している．しかしS′では針金が速さ v でうごくので，正電荷密度は

$$\rho_+'=\frac{\rho_+}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \tag{13.24}$$

となる．

負電荷はS′で静止している．それでこの座標で"静止密度" ρ_0 をもつ．式（13.23）で $\rho_0=\rho_-'$ である．なぜかというと針金が静止しているとき，つまりS系で，負電荷の速さは v であるとき密度 ρ_- をもつからである．それで伝導電子に対して

$$\rho_-=\frac{\rho_-'}{\sqrt{1-v^2/c^2}}, \tag{13.25}$$

あるいは

$$\rho_-'=\rho_-\sqrt{1-v^2/c^2}. \tag{13.26}$$

これでS′で電場のできるわけが説明できる．なぜならこの座標系 S′ では針金は次の正味の電気密度 ρ' をもつから，

$$\rho'=\rho_+'+\rho_-'.$$

（13.24）と（13.26）とから

$$\rho'=\frac{\rho_+}{\sqrt{1-v^2/c^2}}+\rho_-\sqrt{1-v^2/c^2}.$$

静止している針金は中性であるから $\rho_-=-\rho_+$ であって，

$$\rho'=\rho_+\frac{v^2/c^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}}. \tag{13.27}$$

動く針金は正に帯電していて，外部に静止している粒子の所に電場 E' をつくる．一様に帯電した円筒の静電気問題はすでに解いてある．軸から r のところの電場は

$$E'=\frac{\rho'A}{2\pi\epsilon_0r}=\frac{\rho_+Av^2/c^2}{2\pi\epsilon_0r\sqrt{1-v^2/c^2}}. \tag{13.28}$$

負の電気の粒子にはたらく力は針金の方にむいている．少くとも，二つの見方から同じ方向の力を得る：S′系の電気力とS系の磁気力は同じ方向にある．

S′からみた力の大きさは

$$F'=\frac{q}{2\pi\epsilon_0}\frac{\rho_+A}{r}\frac{v^2/c^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}}. \tag{13.29}$$

この結果 F' と式（13.21）の F とを比べると，力の大きさはほとんど二つの見方で同じであることがわかる．実際

$$F'=\frac{F}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \tag{13.30}$$

・全電荷は速度によらず一定
・長さは速度によって変化
（伸縮）　（13.22）
⇓
∴電荷密度は速度に依存．

がわかる．

$$
\begin{aligned}
x' &= \frac{x-ut}{\sqrt{1-u^2/c^2}}, & j'_x &= \frac{j_x-u\rho}{\sqrt{1-u^2/c^2}},\\
y' &= y, & j'_y &= j_y,\\
z' &= z, & j'_z &= j_z,\\
t' &= \frac{t-ux/c^2}{\sqrt{1-u^2/c^2}}, & \rho' &= \frac{\rho-uj_x/c^2}{\sqrt{1-u^2/c^2}}. \qquad (13.35)
\end{aligned}
$$

これらの方程式によってある座標系の ρ, $\boldsymbol{j}$ と他の座標系のそれとを結びつけることができる．任意の座標の電荷，電流密度をとって，マクスウェル方程式を使ってこの座標系の電磁場がとかれる．**粒子運動**について得る結果は座標のえらび方に無関係である．電磁場の相対論的変換についてはのちにまた述べる．

13-8 重ね合わせ；右手の規則

この章を終るにあたって，静磁場の問題に関する二つの事項を強調しておきたい．第一に，磁場の基礎方程式

$$\nabla\cdot\boldsymbol{B}=0,\qquad \nabla\times\boldsymbol{B}=\boldsymbol{j}/c^2\varepsilon_0$$

は $\boldsymbol{j}$ と $\boldsymbol{B}$ について線形である．このことから重ね合わせの原理は磁場にもあてはまることがわかる．二つの別の定常電流のつくる場は，それぞれの電流による場の和である．第二の注意は，(電流のつくる磁場に対するような)右手規則についてである．鉄の磁石の磁化が物質内の電子スピンによって理解されることも学んだ．スピンする電子の磁場の向きはスピン軸と右手規則で結びついている．$\boldsymbol{B}$ は“手”の規則によりきめられる——ベクトル積や curl を含む——ので，**軸性**ベクトルといわれる．(右や左の手を基準とせずに方向がきめられるベクトルは**極性**ベクトルといわれる．たとえば変位，速度，力，$\boldsymbol{E}$ などは極性ベクトルである．)

しかし**物理的に観測可能な**電磁量は右(または左)手規則に関係が**ない**．電磁相互作用は鏡映に対して対称である(第II巻第27章)．二つの電流間の磁気力を計算してみると，結果は右手から左手にかえても不変である．われわれの方程式から，右手規則とは関係なく，平行電流は引き合い，反対電流はしりぞけ合う結果が出る．(“左手規則”を使って力を求めてみよ．) 引力，斥力は極性ベクトルである．こういうことになるのは完全な相互作用を表わすために右手規則を2度使うからである——一度は電流から $\boldsymbol{B}$，次はこの $\boldsymbol{B}$ が第二の電流に及ぼす力を求める時．右手規則を2度使うのは左手規則を2度使うのと同じである．左手規則に約束をかえると，$\boldsymbol{B}$ 場はすべて逆向きになるが，力は——あるいはおそらくもっと適切な物体の観測される加速度は——すべて不変である．

物理学者は最近**すべての**自然法則は必ずしも鏡映に対して不変とは限らないことを発見して驚いたが，電磁気の法則は実際にこの基本的対称性をもっている．

第 14 章
色々の条件下の磁場

14-1 ベクトルポテンシャル

この章で定常電流に伴う磁場——静磁場の問題——の議論を続ける．電流と磁場を結ぶ基本方程式は次の2式である．

$$\nabla\cdot\boldsymbol{B}=0, \qquad (14.1)$$

$$c^2\nabla\times\boldsymbol{B}=\frac{\boldsymbol{j}}{\varepsilon_0}. \qquad (14.2)$$

今度は，この式を数学として**一般的に**，つまり特別の対称性や直観的な予想なしに解こう．静電場では，電荷の位置が分っているとき直接に場を求める方法が知られていた．このときには，電荷の積分——式(4.25)——を求めてスカラーポテンシャル ϕ が計算できる．電場を求めるには ϕ を微分すればよい．つぎに，すべての動く電荷のつくる電流密度 $\boldsymbol{j}$ が分っているとき磁場を求める同様の方法が存在することを示そう．

静電気で($\boldsymbol{E}$ の curl は常に0だから) $\boldsymbol{E}$ をスカラー場 ϕ の grad として表わすことができるのを見た．ところで $\boldsymbol{B}$ の curl は必ずしも0で**ない**ので，一般には grad として表わせない．しかし，$\boldsymbol{B}$ の“div”はいつも0である．従って別のベクトル場の“curl”として表わされる．2-7節でみたように，curl の div は必ず0だから．こうして $\boldsymbol{B}$ は必ず $\boldsymbol{A}$ と呼ぶ場と

$$\boldsymbol{B}=\nabla\times\boldsymbol{A} \qquad (14.3)$$

で結ばれている．これを成分で書くと

$$
\begin{aligned}
B_x &= (\nabla\times\boldsymbol{A})_x = \frac{\partial A_z}{\partial y}-\frac{\partial A_y}{\partial z},\\
B_y &= (\nabla\times\boldsymbol{A})_y = \frac{\partial A_x}{\partial z}-\frac{\partial A_z}{\partial x}, \qquad (14.4)\\
B_z &= (\nabla\times\boldsymbol{A})_z = \frac{\partial A_y}{\partial x}-\frac{\partial A_x}{\partial y}.
\end{aligned}
$$

$\boldsymbol{B}=\nabla\times\boldsymbol{A}$ と書くと(14.1)はみたされている．

$$\nabla\cdot\boldsymbol{B}=\nabla\cdot(\nabla\times\boldsymbol{A})=0$$

だからである．場 $\boldsymbol{A}$ を**ベクトルポテンシャル**と呼ぶ．

スカラーポテンシャルがその定義式から一義的にきまらなかったことを記憶している人もあるだろう．ある問題の解を ϕ とするとき，定数を加えた

$$\phi'=\phi+C$$