電気磁気学Ⅰ補足資料（後半５回目 2019.12.16 種村拓夫）

■ 表皮効果

一般に，導体に高周波の交流電流を流すと，電流は表面に集中する。

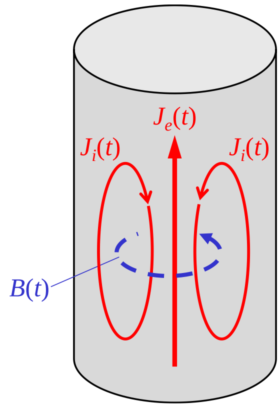
［定性的な説明］

① 外部電源により交流電流が流れ，導体内部の電流密度 $J_e(t)$が増加すると，周囲の磁束密度 $B(t)$も増加する．（アンペアの法則）

② その結果，$B(t)$の増加を妨げる向きに誘導起電力が発生し，誘導電流 $J_i(t)$が流れる．

③ 導体の中央では，$J_e(t)$と $J_i(t)$ が逆向きになり弱められるため，表面のみが残る．

誘導起電力は $\partial B/\partial t$ に比例するため，周波数が高いほど著しい．



［より厳密に］（教科書 157 ページ）

導体内部では，

$$\nabla\times\mathbf{E} = -\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t} \quad \cdots\text{(i)} \quad \text{(ファラデーの電磁誘導の法則)}$$

$$\nabla\times\mathbf{H} = \boldsymbol{i}_\mathbf{F} \quad \cdots\text{(ii)} \quad \text{(アンペアの法則)}$$

(ii)に $\boldsymbol{i}_\mathbf{F} = \sigma\mathbf{E}$ （オームの法則）および $\mathbf{H} = (1/\mu)\mathbf{B}$ を代入して，$\nabla\times\left(\frac{\mathbf{B}}{\mu}\right) = \sigma\mathbf{E} \quad \cdots\text{(iii)}$

(iii) より $\mathbf{E}$ を(i)に代入して，$\nabla\times\left(\frac{1}{\sigma}\nabla\times\frac{\mathbf{B}}{\mu}\right) = -\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t} \quad \cdots\text{(iv)}$

導体内でσとμが空間的に一様であれば，(iv)式左辺は，

$\frac{1}{\sigma\mu}\nabla\times\nabla\times\mathbf{B} = \frac{1}{\sigma\mu}[\nabla(\nabla\cdot\mathbf{B}) - \nabla^2\mathbf{B}] = -\frac{1}{\sigma\mu}\nabla^2\mathbf{B}$ （1 つ目の等号はベクトル公式．2 つ目は$\nabla\cdot\mathbf{B} = 0$）

$$\therefore \nabla^2\mathbf{B} = \sigma\mu\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t} \quad \cdots\text{(v)}$$

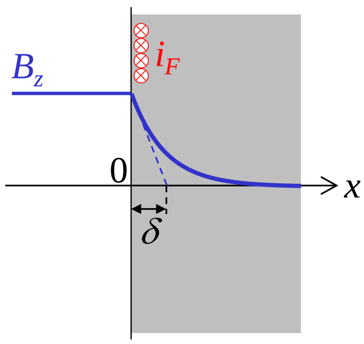
今，$x = 0$（導体界面）において，角周波数ωで振動する $\mathbf{B}$ の z 成分が存在する場合を考える．

z 方向成分を$B_z \equiv B_0 e^{j\omega t + \gamma x}$ として(v)式に代入すると，

$\gamma^2/\sigma\mu = j\omega$ より，$\gamma = \pm\left(\sqrt{\omega\sigma\mu/2} + j\sqrt{\omega\sigma\mu/2}\right)$

$x\to\infty$ で収束するためには，

$$B_z = \mathrm{Re}\left[B_0 e^{j\left(\omega t - \sqrt{\omega\sigma\mu/2}x\right)}\right]e^{-\sqrt{\frac{\omega\sigma\mu}{2}}x}$$



$\therefore |B_z|$は，x 方向に指数的に減衰する．

1/e に減衰する深さは**表皮厚**（skin depth）と呼ばれ，

$$\boxed{\delta = \sqrt{2/\omega\sigma\mu} \quad \cdots(3.13)}$$

と表される．

(ii)式より，自由電流 $\boldsymbol{i}_\mathbf{F}$ も厚みδの表面にのみ流れる．

［数値例］

銅：σ~6.0×10^7 S/m, μ~1.25×10^{-6} H/m ⇒ δ ~ 9 mm @50 Hz, 2 µm @ 1GHz