

① 講義ノート(1.8)式

$$\nabla \left(\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \right) = - \frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3}$$

ただし $\mathbf{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, $\mathbf{r}' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$, $\nabla \equiv \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix}$ は $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ に対する微分演算子。

【導出】

$$|\mathbf{r}-\mathbf{r}'| = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \right) = - \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^2} \frac{\partial}{\partial x} (|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|) = - \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^2} \frac{2(x-x')}{2|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} = - \frac{(x-x')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3} \quad y, z \text{ 成分も同様} \quad \blacksquare$$

② 任意のスカラー関数 $f(x, y, z)$ とベクトル関数 $\mathbf{u}(x, y, z)$ について,

$$(a) \nabla \times (f\mathbf{u}) = \nabla f \times \mathbf{u} + f(\nabla \times \mathbf{u}) \quad \text{講義ノート(1.9)式}$$

$$(b) \nabla \times (\nabla f) = 0$$

$$(c) \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{u}) = 0$$

$$(d) \nabla \cdot (f\mathbf{u}) = (\nabla f) \cdot \mathbf{u} + f \nabla \cdot \mathbf{u}$$

【導出】

$$(a) x \text{ 成分は、} \frac{\partial(fu_z)}{\partial y} - \frac{\partial(fu_y)}{\partial z} = \left(\frac{\partial f}{\partial y} u_z - \frac{\partial f}{\partial z} u_y \right) + f \left(\frac{\partial u_z}{\partial y} - \frac{\partial u_y}{\partial z} \right) \quad y, z \text{ 成分も同様}$$

$$(b) x \text{ 成分は、} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial z} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) = 0 \quad y, z \text{ 成分も同様}$$

$$(c) \operatorname{div}(\operatorname{rot} \mathbf{V}) = \operatorname{div} \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ V_x & V_y & V_z \end{vmatrix} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial V_z}{\partial y} - \frac{\partial V_y}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial V_x}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y} \right) = 0$$

$$(d) \nabla \cdot (f\mathbf{u}) = \frac{\partial}{\partial x} (fu_x) + \frac{\partial}{\partial y} (fu_y) + \frac{\partial}{\partial z} (fu_z)$$

$$= \left(\frac{\partial f}{\partial x} u_x + f \frac{\partial u_x}{\partial x} \right) + \left(\frac{\partial f}{\partial y} u_y + f \frac{\partial u_y}{\partial y} \right) + \left(\frac{\partial f}{\partial z} u_z + f \frac{\partial u_z}{\partial z} \right)$$

$$= \left(\frac{\partial f}{\partial x} u_x + \frac{\partial f}{\partial y} u_y + \frac{\partial f}{\partial z} u_z \right) + f \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right)$$

$$= (\nabla f) \cdot \mathbf{u} + f \nabla \cdot \mathbf{u}$$

③ 位置 $\mathbf{r}$ におけるベクトルポテンシャルは、

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\mathbf{i}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} dv' \quad \dots \text{講義ノート (1.11) 式} \quad (\text{教科書(6.33)式})$$

と定義される。ただし、 $\int_V dv'$ は、電流が存在する全領域 V で $\mathbf{r}'$ に対して体積積分。

このとき、

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = 0 \quad (\text{クーロングージ}) \dots \text{講義ノート (1.18) 式}$$

ただし、 ∇ は、位置 $\mathbf{r}$ に対する微分演算子

【証明】

$$\nabla \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \nabla \cdot \left(\frac{\mathbf{i}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \right) dv' \quad (\because \nabla \text{ は } \mathbf{r} \text{ の演算子なので } \int_V dv' \text{ の中に入れて良い})$$

②(d)を、 $f \equiv 1/|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|$, $\mathbf{u} \equiv \mathbf{i}(\mathbf{r}')$ として用いると、

$$\nabla \cdot \left(\frac{\mathbf{i}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \right) = \nabla \left(\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \right) \cdot \mathbf{i}(\mathbf{r}') + \frac{\nabla \cdot \mathbf{i}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \quad \dots (1)$$

∇ は $\mathbf{r}$ の演算子なので右辺第 2 項目は零。

$$\therefore \nabla \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \nabla \left(\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \right) \cdot \mathbf{i}(\mathbf{r}') dv' \quad \dots (2)$$

一方、 $\mathbf{r}'$ に対する微分演算子を ∇' と書くと、(1)式と同様に、

$$\nabla' \cdot \left(\frac{\mathbf{i}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \right) = \nabla' \left(\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \right) \cdot \mathbf{i}(\mathbf{r}') + \frac{\nabla' \cdot \mathbf{i}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \quad \dots (3)$$

①の結果を ($\mathbf{r}$ と $\mathbf{r}'$ を入れ替えて) 用いると、右辺 1 項中の

$$\nabla' \left(\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \right) = -\frac{\mathbf{r}'-\mathbf{r}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3} = -\nabla \left(\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \right)$$

また、定常電流条件より、第 2 項中の

$$\nabla' \cdot \mathbf{i}(\mathbf{r}') = 0 \quad \text{なので、(3)式は、}$$

$$\nabla' \cdot \left(\frac{\mathbf{i}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \right) = -\nabla \left(\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \right) \cdot \mathbf{i}(\mathbf{r}')$$

上式を(2)に代入して、

$$\therefore \nabla \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}) = -\frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \nabla' \cdot \left(\frac{\mathbf{i}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \right) dv'$$

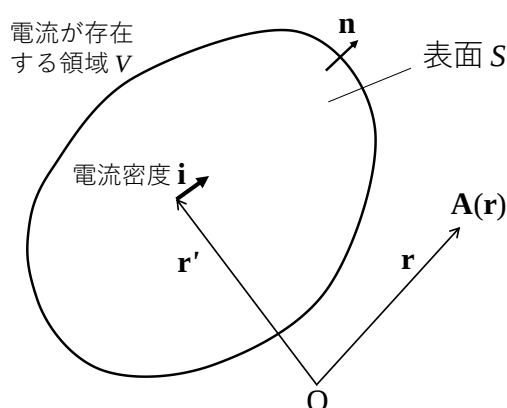
ガウスの定理を用いると、

$$\nabla \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}) = -\frac{\mu_0}{4\pi} \int_S \frac{\mathbf{i}(\mathbf{r}') \cdot \mathbf{n}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} dS'$$

ただし、 $\int_S dS'$ は、領域 V の表面全体に対する面積分。 $\mathbf{n}$ は、表面の単位法線ベクトル。

いま、領域 V は、電流が存在する全領域なので、その表面 S において、電流 $\mathbf{i}(\mathbf{r}')=0$ 。

従って、 $\nabla \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}) = 0$ ■



● A のゲージ (選び方)

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) \equiv \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{i(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} d\mathbf{v}' \quad (1.11)$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \nabla \times \mathbf{A} \quad (1.12)$$

(1.11)の両辺に div を取ると、

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = 0 \quad (1.18) \quad (\text{導出は前頁})$$

スカラーポテンシャル $V(\mathbf{r})$ に定数 V_0 (任意のエネルギー基準) を加えても、電界 $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ は変わらない。なぜなら、 $\mathbf{E} = -\nabla(V + V_0) = -\nabla V - \nabla V_0 = -\nabla V$ だからである。

同様に、(1.11)で定義した $\mathbf{A}$ に任意の定数ベクトル $\mathbf{A}_0$ を加えても、(1.12)で求める磁束密度 $\mathbf{B}(\mathbf{r})$ は変わらない。それどころか、 $\mathbf{A}$ の選び方には、 V 以上に任意性がある。

例えば、任意のスカラー関数 $\phi(\mathbf{r})$ を考え、その $\nabla\phi$ を $\mathbf{A}$ に加えて、

$$\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla\phi \quad (1.19)$$

を新しく定義してみると、

$$\nabla \times \mathbf{A}' = \nabla \times \mathbf{A} + \nabla \times (\nabla\phi) = \nabla \times \mathbf{A} \quad (\because \text{ベクトル公式②(b)より, } \nabla \times (\nabla\phi) = 0)$$

となり、 $\mathbf{B}$ は変わらない。

そこで、より広義に、(1.19)により変換 (ゲージ変換と呼ぶ) できる $\mathbf{A}'$ を全てベクトルポテンシャルと呼ぶことにする。言い換えると、(1.11)ではなく(1.12)を $\mathbf{A}$ の定義式と改め、(1.12)によって正しい $\mathbf{B}$ が得られる全ての形の $\mathbf{A}$ をベクトルポテンシャルと定義する。

ただし、このように $\mathbf{A}$ をゲージ変換すると、一般には $\nabla \cdot \mathbf{A} \neq 0$ となり、(1.18)が満たされるとは限らない。(この場合、(1.17)も満たされない。)

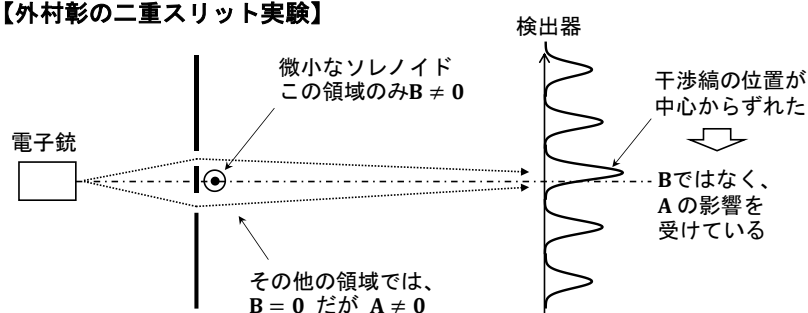
$\mathbf{A}$ の“選び方”をゲージと言い、特に(1.18)を満たすように $\mathbf{A}$ を選ぶことをクーロンゲージと呼ぶ。(その場合、(1.17)も満たされる。“クーロン”と呼ばれる理由は、 $\mathbf{A}$ がクーロンポテンシャルと同様の計算で求められることから明らかであろう。)

● A の意義

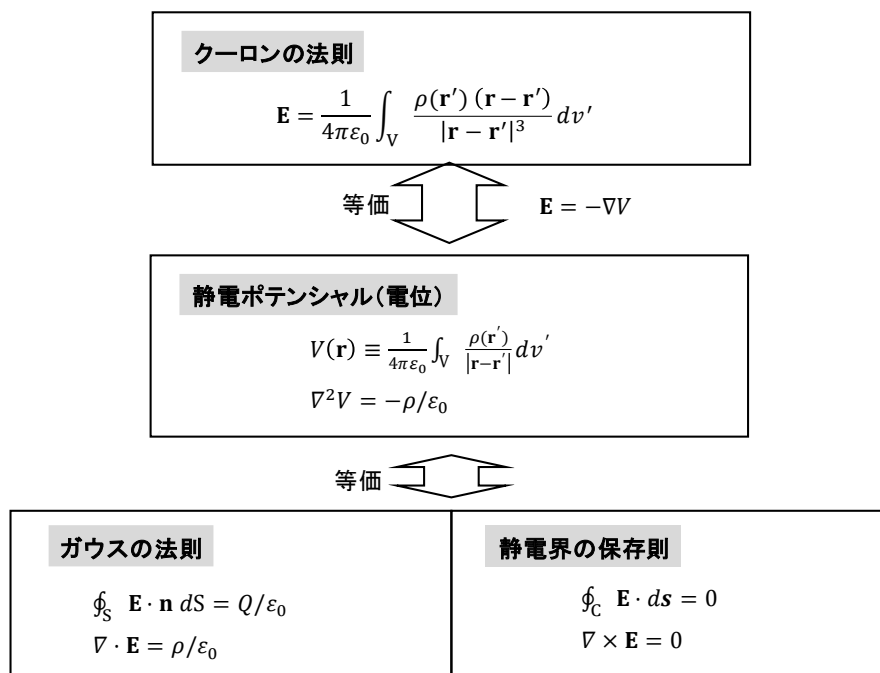
- ① ビオ・サバールの式 (1.7) の計算に比べて、(1.11)または(1.17)から $\mathbf{A}$ を求めて、それから(1.12)により $\mathbf{B}$ を計算する方が楽なことが多い。($\mathbf{A}$ もベクトルなので、スカラーの V ほどは効果的ではないが、ベクトルの外積を計算しなくて良いのは良い。)
- ② 量子力学的には、 $\mathbf{B}$ よりも $\mathbf{A}$ が本質的に重要な物理量であることが分かっている。 $\mathbf{B} = \mathbf{0}$ でも、 $\mathbf{A} \neq \mathbf{0}$ の領域を電子が横切ると、その波動関数の位相が影響を受ける。

Aharonov-Bohm 効果 (AB 効果) と呼ばれ、1986 年に外村により初めて実験的に証明された。(ファイマン III, 15-4 章, p.189)

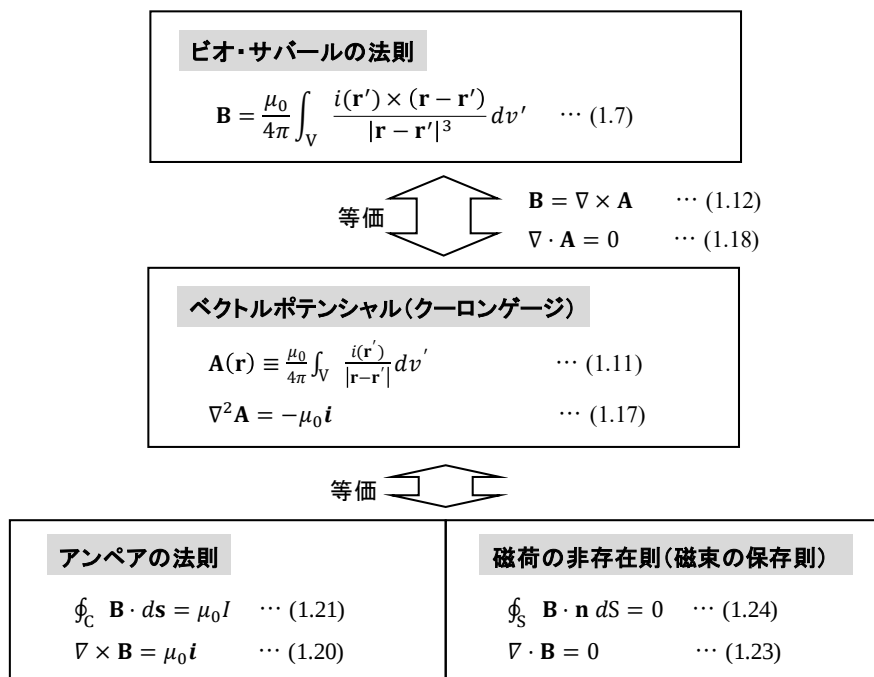
【外村彰の二重スリット実験】



● 静電磁界の体系



静電界の体系 (教科書図 1.18)



静磁界の体系 (教科書図 6.21)